FOLOSIREA DEPLASĂRILOR ELASTICE ÎN CALCULUL CADRELOR

de Inginer ALEXANDRU GHEORGHIU
Conferenţiar la Politechnica din Bucureşti

(urmare)

Cadru cu două deschideri, triplu încastrat.

Construcţiunea este de 6 ori static nedeterminată, deci va fi necesară introducerea a 6 articulaţiuni, spre a obţine sistemul static determinat de bază. Le vom repartiza astfel:

— câte o articulaţie în rezemările sau nodurile 1, 2, 5 şi 6

— două articulaţii în nodul central, în secţiunile 3 şi 4.

Se constată că a rămas în fiinţă încastrarea din reazemul 7, ea menţinând stabilitatea construcţiunii.

Necunoscutele static nedeterminate vor fi: M_1, M_2,... M_6.

Grupul ecuaţiilor de echilibru elastic va avea forma:

art. 1	$\theta_{11} M_1 + \theta_{12} M_2 + \ldots\ldots + \theta_{16} M_6 + \theta_{1s} = 0$
art. 2	$\theta_{21} M_1 + \theta_{22} M_2 + \ldots\ldots + \theta_{26} M_6 + \theta_{2s} = 0$
.....	....
art. 6	$\theta_{61} M_1 + \theta_{62} M_2 + \ldots\ldots + \theta_{66} M_6 + \theta_{6s} = 0$

Diagramele coeficienţilor de influenţă (fig. 11) arată că bara 7-4 are suprafaţă de moment în toate cazurile, afară de m_{x3}, ce corespunde sistemului static determinat solicitat de momentul $M_3 = 1$ tm; aci reacţiunile, ce sunt date în extremităţile barelor simplu rezemate 2-3 şi 3-5, sunt verticale, astfel că sistemul are stabilitate, chiar dacă încastrarea din 7 nu ar exista.

In ceia ce priveşte diagramele de momente încovoetoare, date în sistemul static determinat de către solicitările exterioare, se vede că:

— solicitările verticale de pe barele 2-3 şi 3-5 dau diagrame de momente numai pe aceste bare, ca grinzi simplu rezemate în 2 resp. 5 şi articulate în 3;

— solicitările de pe bara 7-4 dau diagramă de moment numai pe această bară, ca grindă încastrată în 7 şi liberă la extremitatea 4;

— solicitările de pe barele 1-2 şi 5-6 dau diagrame de moment pe barele respective, considerate ca grinzi articulate în 1 resp. 6 şi cu reazeme de reacţiune orizontală în 2 resp. 5; în acelaş timp dau şi diagramă de moment în bara 4-7, care asigură stabilitatea construcţiunii.

Pentru claritate s'au pus semne pe toate diagramele, figurând şi suprafeţe negative.

Ţinând seamă de expresiile rotirilor θ_{ii} şi θ_{ik}, de diagramele coeficienţilor de influenţă şi de rezultatele tip de integrare, se obţine tabloul de coeficienţi ce figurează în sistemul de ecuaţii.

In prima parte a tabloului se văd coeficienţii θ_{ik}, aşa cum sunt *culeşi* din diagramele coeficienţilor de influenţă. Se constată că numai patru din aceştia sunt nuli, ceia ce ar conduce la rezolvarea unui sistem de 6 ecuaţii cu 6 necunoscute, egal cu gradul de nedeterminare.

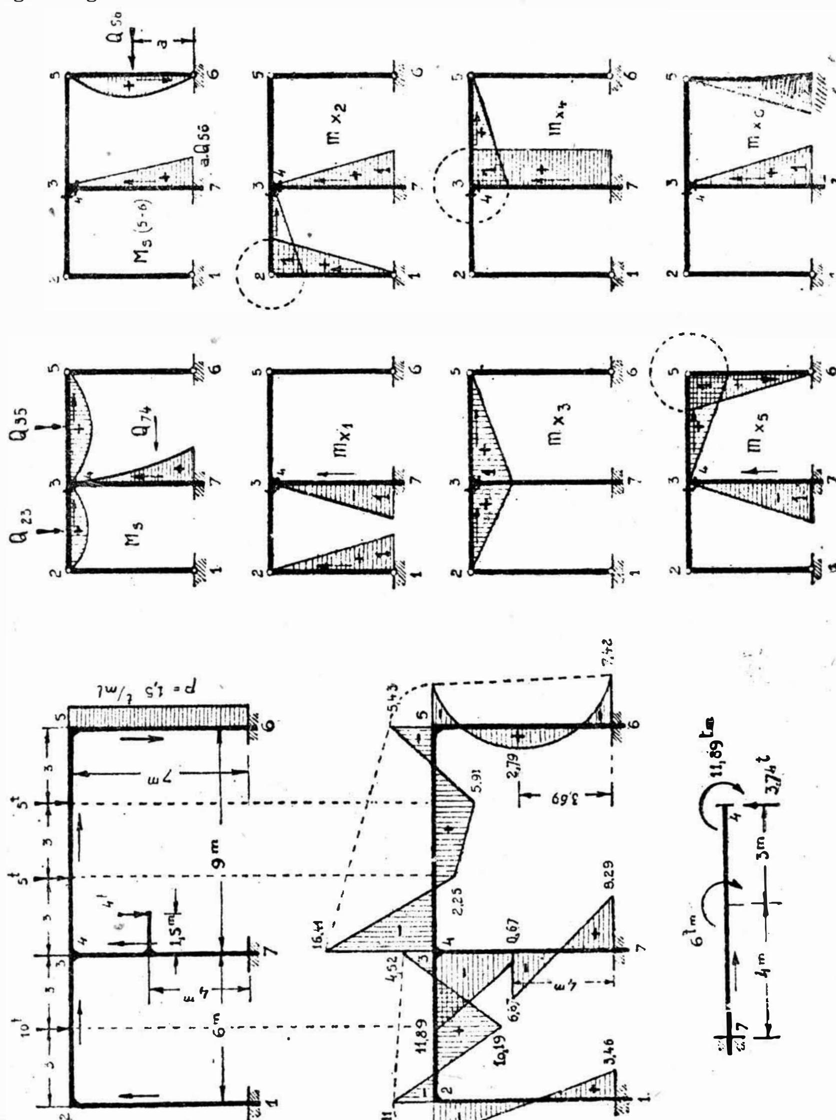


Fig. 11. — Cadru cu două deschideri, triplu încastrat.

Numărul atât de redus de goluri se datoreşte barei 7-4, ce prezintă suprafaţă de momente în 5 din cele 6 diagrame m_{xi}, datorită încastrării din 7, care menţine nedeformabilitatea statică a construcţiunii.

TABLOU

cuprinzând coeficienții cantităților static nedeterminate

			M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
	Art.	θ_{ik}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}	θ_{i6}
I	1	θ_{1k}	$2(\lambda_{12}+\lambda_{74})$	$\lambda_{12}-2\lambda_{74}$	—	$-3\lambda_{74}$	$2\lambda_{74}$	$-2\lambda_{74}$
	2	θ_{2k}	$\lambda_{12}-2\lambda_{74}$	$2(\lambda_{12}+\lambda_{23}+\lambda_{74})$	λ_{23}	$3\lambda_{74}$	$-2\lambda_{74}$	$2\lambda_{74}$
	3	θ_{3k}	—	λ_{23}	$2(\lambda_{23}+\lambda_{35})$	$2\lambda_{35}$	λ_{35}	—
	4	θ_{4k}	$-3\lambda_{74}$	$3\lambda_{74}$	$2\lambda_{35}$	$2(\lambda_{35}+3\lambda_{74})$	$\lambda_{35}-3\lambda_{74}$	$3\lambda_{74}$
	5	θ_{5k}	$2\lambda_{74}$	$-2\lambda_{74}$	λ_{35}	$\lambda_{35}-3\lambda_{74}$	$2(\lambda_{35}+\lambda_{56}+\lambda_{74})$	$-2\lambda_{74}+\lambda_{56}$
	6	θ_{6k}	$-2\lambda_{74}$	$2\lambda_{74}$	—	$3\lambda_{74}$	$-2\lambda_{74}+\lambda_{56}$	$2(\lambda_{74}+\lambda_{56})$
II	$\theta_1+\theta_2$		$3\lambda_{12}$	$3\lambda_{12}+2\lambda_{23}$	λ_{23}	—	—	—
	$2(\theta_2-\theta_4)-\theta_1$		—	$3\lambda_{12}+4\lambda_{23}$	$2(\lambda_{23}-2\lambda_{35})$	$-(4\lambda_{35}+3\lambda_{74})$	$-2\lambda_{35}$	—
	θ_3		—	λ_{23}	$2(\lambda_{23}+\lambda_{35})$	$2\lambda_{35}$	λ_{35}	—
	θ_4		$-3\lambda_{74}$	$3\lambda_{74}$	$2\lambda_{35}$	$2(\lambda_{35}+3\lambda_{74})$	$\lambda_{35}-3\lambda_{74}$	$3\lambda_{74}$
	$2(\theta_4+\theta_5)-\theta_6$		—	—	$6\lambda_{35}$	$3(2\lambda_{35}+\lambda_{74})$	$3(2\lambda_{35}+\lambda_{56})$	—
	$\theta_5+\theta_6$		—	—	λ_{35}	λ_{35}	$2\lambda_{35}+3\lambda_{56}$	$3\lambda_{56}$

Observând însă că, pentru aceiași necunoscută, coeficienții din diferitele ecuații sunt uneori de formă asemănătoare, există posibilitatea de a constitui un nou sistem de ecuații, prin combinarea convenabilă a ecuațiilor inițiale. In partea a doua a tabloului s'a dat noul sistem, putându-se vedea în prima coloană indicarea combinărilor făcute. De data aceasta sunt nuli un număr de 12 coeficienți, ceia ce reprezintă un avantaj sensibil pentru rezolvare.

Simplificarea aceasta este posibilă deoarece din diagramele coeficienților de influență se constată că, pentru bara 7-4, suprafața de momente e *aceiași* în 4 din 6 cazuri, diferind numai ca semn, ceia ce duce la apariția a numeroși coeficienți asemănători, ce se pot simplifica sau elimina prin combinarea ecuațiilor.

Compararea celor două părți ale tabloului arată că, în primul caz, λ_{74} este prezent în aproape toți coeficienții (în mulți din ei figurând chiar singur), pe când în cazul al doilea λ_{74} nu mai apare decât în două locuri (în ecuațiile combinate) la necunoscuta M_4, aceasta deoarece m_{x4} are pe bara 7-4 o suprafață de momente diferită.

Anularea unora din coeficienți, prin acest procedeu, capătă o semnificare foarte simplă de îndată ce se privesc diagramele m_{xi}. Să ne explicăm pe un exemplu:

Prima ecuație din partea a doua a tabloului, s'a obținut din sumarea ecuațiilor inițiale 1 și 2, semnificând fiecare că suma tuturor rotirilor din articulațiile 1 resp. 2, sub acțiunea solicitărilor (sarcini exterioare și cantități static nedeterminate), este egală cu zero; deci și suma lor va fi egală cu zero.

In această ecuație s'au anulat coeficienții necunoscutelor M_4, M_5 și M_6. Considerând pe M_4, observăm că în ecuațiile inițiale coeficienții respectivi erau θ_{14} și θ_{24}, devenind în noua ecuație $\theta_{14} + \theta_{24} = 0$. Aceasta înseamnă că, dacă asupra sistemului static determinat acționează momentul—unitate în articulația 4, rotirile din articulațiile 1 și 2 sunt egale și de sens contrar. Mai mult încă, ținând seamă de reciprocitatea deplasărilor, avem $\theta_{14} = \theta_{41}$; $\theta_{24} = \theta_{42}$ și $\theta_{41} + \theta_{42} = 0$, ceia ce înseamnă că aplicând *concomitent* momente egale cu unitatea în articulațiile 1 și 2 ale sistemului static determinat, *rotirea produsă în articulația* 4 *e nulă*.

Dar aceste constatări se pot face direct pe diagrame; rotirile $\theta_{41} = \theta_{14}$ și $\theta_{42} = \theta_{24}$ rezultă din multiplicarea coeficienților de influență m_{x1} cu m_{x4} resp. m_{x2} cu m_{x4}. In ambele cazuri, nu există suprafețe de moment comune decât pe bara 7-4, aceste suprafețe fiind egale și de sens contrar pentru coeficienții m_{x1} și m_{x2}, deci evident vom avea $\theta_{41} + \theta_{42} = 0$. In mod analog, considerând pe M_5 sau M_6 și făcând acelaș raționament, se vede că putem obține *direct de pe diagrame* anularea coeficienților $\theta_{51} + \theta_{52} = 0$ și $\theta_{61} + \theta_{62} = 0$.

Constatăm deci că inspectarea diagramelor poate arăta foarte repede modul cum trebuesc făcute combinările de ecuații, spre a avea cât mai mulți termeni nuli, fiind posibil în multe cazuri de a scrie direct sistemul simplificat de ecuații, fără a mai fi nevoe de constituirea coeficienților din prima parte a tabloului.

Posibilitățile de simplificare a chestiunii, prin combinarea ecuațiilor, nu constituesc un caz accidental al problemei de față, ci o caracteristică generală pentru toate construcțiunile unde, la stabilirea sistemului static determinat de bază, rămân încastrări nesuprimate, în rezemări sau între bare.

Bine înțeles că, atunci când formăm sistemul simplificat de ecuații, termenii liberi se vor obține făcând aceleași combinări, ca și la obținerea coeficienților necunoscutelor.

Prerivind structura ecuațiilor, indicată în partea a doua a tabloului, se constată că rezolvarea e mult ușurată: prima ecuație poate da pe M_1 în funcție de M_2 și M_3; de asemenea ultimele două ecuații dau pe M_5 și M_6 în funcție de M_3 și M_4. Ducând valorile găsite în celelalte trei ecuații, vom obține în definitiv un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute; la aceasta se reduce de fapt rezolvarea construcțiunii considerate, care e de 6 ori static nedeterminată.

Pentru fixarea ideilor, să trecem la aplicația numerică arătată în fig. 11.

Admitem inițial:

$$n_{12} = n_{74} = n_{56} = 2\,;\ n_{23} = 1{,}5 \ \text{și}\ n_{35} = 1 \qquad \text{deci:}$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{74} = \lambda_{56} = 2.7 = 14\,\text{m}\,;\ \lambda_{23} = 1{,}5.6 = 9\,\text{m}\ ;\ \lambda_{35} = 1.9 = 9\,\text{m}$$

astfel că se pot calcula imediat toți coeficienții necunoscutelor.

Să formăm termenii liberi. Ținând seama de expresia rotirilor θ_{is}, de diagramele M_s și m_{xi}, cât și de rezultatele tip de integrare, se obține:

$$\theta_{1s} = -R_{7(7-4)} - 2\,a.\,Q_{56}\lambda_{74} = -\ 822$$
$$\theta_{2s} = R_{2(2-3)} + R_{7(7-4)} + 2\,a.\,Q_{56}\lambda_{74} = +\ 1024$$
$$\theta_{3s} = R_{3(2-3)} + R_{3(3-5)} = +\ 472$$
$$\theta_{4s} = R_{3(3-5)} + F_{74} + 3\,a.\,Q_{56}\lambda_{74} = +\ 1788$$
$$\theta_{5s} = R_{5(3-5)} - R_{7(7-4)} + R_{5(5-6)} - 2\,a.\,Q_{56}\lambda_{74} = -\ 295$$
$$\theta_{6s} = R_{7(7-4)} + R_{6(5-6)} + 2\,a.\,Q_{56}\lambda_{74} = +\ 1079$$

deoarece, pe baza formulelor dela pag. 260 avem:

$$R_{2(2-3)} = R_{3(2-3)} = 6n_{23}.S_{32}/l_{23} = 6.1{,}5.10.6^2/16 = 202\ \text{tm}^2$$
$$R_{3(3-5)} = R_{5(3-5)} = 6n_{35}.S_{53}/l_{35} = 6.1.5.9^2/9 = 270\ \text{tm}^2$$
$$R_{7(7-4)} = 6n_{74}.S_{47}/l_{74} = -6.2\,\frac{4.1{,}5}{2.7}.4(7+3) = -206\ \text{tm}^2$$
$$R_{5(5-6)} = R_{6(5-6)} = 6n_{56}.S_{65}/l_{56} = 6.2.1{,}5.7^3/24 = 257\ \text{tm}^2$$

și

$$F_{74} = -4.1{,}5.4 = -24\ \text{tm}^2\ ;\ a.Q_{56}\lambda_{74} = 3{,}5.1{,}5.7.14 = 514\ \text{tm}^2.$$

Termenii liberi, corespunzători ecuațiilor din partea a doua a tabloului, vor fi:

$$\theta_{1s} + \theta_{2s} = 202; \qquad \theta_{4s} = 1788$$
$$2(\theta_{2s} - \theta_{4s}) - \theta_{1s} = -706; \qquad 2(\theta_{4s} + \theta_{5s}) - \theta_{6s} = 1907$$
$$\theta_{3s} = 472; \qquad \theta_{5s} + \theta_{6s} = 784$$

Acum putem trece la rezolvarea ecuațiilor.
Prima ecuație este, introducând valorile λ_{ik}:

$$42\,M_1 + 60\,M_2 + 9\,M_3 + 202 = 0 \quad \text{de unde:}$$
$$42\,M_1 = -60\,M_2 - 9\,M_3 - 202.$$

Ultimile două ecuații sunt:

$$54\,M_3 + 96\,M_4 + 96\,M_5 + 1907 = 0$$
$$9\,M_3 + 9\,M_4 + 60\,M_5 + 42\,M_6 + 784 = 0.$$

din care obținem:

$$M_5 = -0{,}563\,M_3 - M_4 - 19{,}86$$
$$42\,M_6 = 24{,}8\,M_3 + 51\,M_4 + 407$$

celelalte trei ecuații sunt:

$$78\,M_2 - 18\,M_3 - 78\,M_4 - 18\,M_5 - 706 = 0$$
$$9\,M_2 + 36\,M_3 + 18\,M_4 + 9\,M_5 + 472 = 0$$
$$-42\,M_1 + 42\,M_2 + 18\,M_3 + 102\,M_4 - 33\,M_5 + 42\,M_6 + 1788 = 0.$$

Introducând expresiile găsite pentru M_1, M_5 și M_6, se obține sistemul definitiv ce trebue rezolvat:

$$M_2 - 0{,}10\,M_3 - 0{,}77\,M_4 - 4{,}47 = 0$$
$$M_2 + 3{,}44\,M_3 + M_4 + 32{,}56 = 0$$
$$M_2 + 0{,}69\,M_3 + 1{,}82\,M_4 + 29{,}92 = 0$$

care dă valorile:

$$M_2 = -5{,}11\ tm;\ M_3 = -4{,}52\ tm\ ;\ M_4 = -11{,}89\ tm.$$

Introducând în expresiile M_1, M_5 și M_6 se obține:

$$M_1 = +3{,}46\ tm;\ M_5 = -5{,}43\ tm;\ M_6 = -7{,}42\ tm.$$

Cunoscând toate cantitățile static nedeterminate, se trasează diagrama definitivă de momente încovoetoare, arătată în fig. 11.

Remarcăm că, pentru bara 7-4, va trebui ținut seamă de modul cum a fost considerată în sistemul static determinat de bază, adică încastrată în 7 și liberă la capătul 4, fiind solicitată așa cum rezultă din diagramele M_s și m_{xi}:

— momentul dat de consolă $M = 4.1{,}5 = 6$ tm., care produce suprafață negativă pe bara 7—4;
— momentul $M_4 = -11{,}89$ tm., aplicat la extremitatea 4 a barei 7—4 (diagrama m_{x4});
— acțiunile orizontale din 4, datorite diagramelor $M_{s(5-6)}$, m_{x1}, m_{x2}, m_{x5} și m_{x6}.

Acțiunea orizontală rezultantă în 4 este, admițând sens pozitiv acela ce produce momente pozitive în bara 7-4:

$$Q_{56}.a/l_{74} + (M_2 + M_6 - M_1 - M_5)/l_{74} = +3{,}74 \text{ tone.}$$

această acțiune exercitându-se în 4 dela dreapta spre stânga.

Solicitările arătate produc în secțiunea 7 un moment $M_7 = +8{,}29$ tm, în lungul barei apărând diagrama de momente arătată în fig. 11.

Valoarea momentului M_7 poate fi obținută și direct, din diagramele M_s și m_{xi}, sumând algebric momentele în secțiunea 7 a fiecăreia din acestea (ținând seamă de valorile găsite pentru $M_1, \ldots M_6$).

$$M_7 = -6 + a.Q_{56} - M_1 + M_2 + M_4 - M_5 + M_8 = +8{,}29 \text{ tm.}$$

Solicitările axiale în bare sunt:

$$N_{12} = 5 + (M_3 - M_2)/l_{23} = 5{,}10 \text{ tone}$$
$$N_{74} = 5 + 5 + (M_2 - M_3)/l_{23} + (M_5 - M_3 - M_4)/l_{35} = 11{,}12 \text{ tone}$$

la care se adaugă 8 tone pe partea inferioară a stâlpului.

$$N_{56} = 5 + (M_3 + M_4 - M_5)/l_{35} = 3{,}78 \text{ tone}$$
$$N_{23} = (M_1 - M_2)/l_{12} = 1{,}22 \text{ tone compresiune}$$
$$N_{35} = 1{,}5.3{,}5 + (M_6 - M_5)/l_{56} = 4{,}96 \text{ tone compresiune}$$

Diferența $N_{35} - N_{23} = 3{,}74$ t. este echilibrată de bara 7-4, așa cum s'a văzut. Cu aceasta cadrul considerat este complet rezolvat.

Din exemplul tratat se constată că și în cazul cadrelor cu noduri deplasabile, se poate aplica ușor organizarea de calcul bazată pe diagramele m_{xi} și tabloul coeficienților cantităților static nedeterminate, ce se obțin prin citire directă pe aceste diagrame. Operația suplimentară, a combinării ecuațiilor, rezultă din însăși forma suprafețelor de momente m_{xi}, care dau indicații suficiente asupra modului cum pot fi eliminați o parte din coeficienți, putându-se în multe cazuri scrie direct ecuațiile, sub forma cea mai comodă pentru calcul. De sigur e necesară o oarecare atențiune, pentru a găsi combinările cele mai favorabile ale ecuațiilor inițiale, fie că aceasta se face direct pe diagrame, fie că se constitue mai întâi primul tablou de coeficienți, operând apoi algebric.

Deci pentru orice fel de cadru, indiferent dacă are nodurile fixe sau deplasabile, diagramele coeficienților de influență permit scrierea imediată a ecuațiilor de echilibru elastic, în număr egal cu acela al cantităților static nedeterminate.

Structura sistemului de ecuații rezultat poate fi totdeauna organizată astfel ca o parte din aceste ecuații, cuprinzând puține necunoscute, să servească la eliminarea unora din cantitățile static nedeterminate din restul sistemului, ajungându-se în toate cazurile la situația de a avea propriu zis de rezolvat un grup de ecuații mult mai mic decât gradul de nedeterminare.

Exemplele tratate au arătat că, în niciunul din cazuri, nu am avut de rezolvat un sistem mai complicat decât de trei ecuații cu trei necunoscute, deși cadrele considerate erau de șase sau șapte ori static nedeterminate, ceia ce reprezintă un avantaj substanțial.

V. POSIBILITĂȚI DE SIMPLIFICARE DIRECTĂ A ECUAȚIILOR LA CADRE CU NODURI DEPLASABILE

Există posibilitatea ca și la cadrele cu noduri deplasabile, să se obțină direct un sistem simplificat de ecuații, tabloul coeficienților prezentând dela început un număr apreciabil de *goluri*, asemănător situației întâlnite la cadrele cu noduri fixe. Acest procedeu este legat însă de *mărirea numărului ecuațiilor*, deși forma lor va fi simplă. Rezolvarea se reduce la un sistem final de ecuații, de asemenea mult mai mic decât gradul de nedeterminare, dar relațiile de legătură între necunoscute vor fi mai numeroase. Procedeul este indicat în special la sisteme multiple, evitând complicarea ecuațiilor.

S'a văzut că, la un cadru cu noduri deplasabile, atunci când se întroduc articulațiile, în vederea obținerii sistemului static determinat de bază, rămân în mod inevitabil nesuprimate unele încastrări, în rezemări sau între bare, asigurându-se astfel nedeformabilitatea statică. In linie generală, la un cadru etajat este necesară menținerea unei încastrări pentru fiecare etaj; aceste încastrări pot fi plasate oriunde în cuprinsul etajului respectiv, deci fie la baza unui stâlp, fie la punctul de întâlnire a două bare.

S'a văzut de asemenea că — în diagramele coeficienților de influență — barele ce duc la încastrări au aproape în toate cazurile suprafețe de momente, acesta fiind faptul datorită căruia, în tabloul de coeficienți ai necunoscutelor, apar foarte puține goluri, sau nu apar de loc.

Evident că dacă încastrările ar dispare, diagramele coeficienților de influență s'ar simplifica imediat; va trebui însă să asigurăm în alt mod nedeformabilitatea statică.

Să considerăm stabilitatea asigurată prin încastrarea între două bare, caz ce se poate referi la orice formă de cadru cu noduri deplasabile (menținerea unei încastrări în reazeme neputându-se aplica acolo unde toate rezemările sunt articulații).

Incastrarea păstrată va solidariza cele două bare, astfel că vor forma împreună o grindă cotită; făcând parte din un sistem static determinat, ea va trebui să fie la rândul său static determinată, deci articulată la un capăt și simplu rezemată la celălalt. In general, capătul inferior al

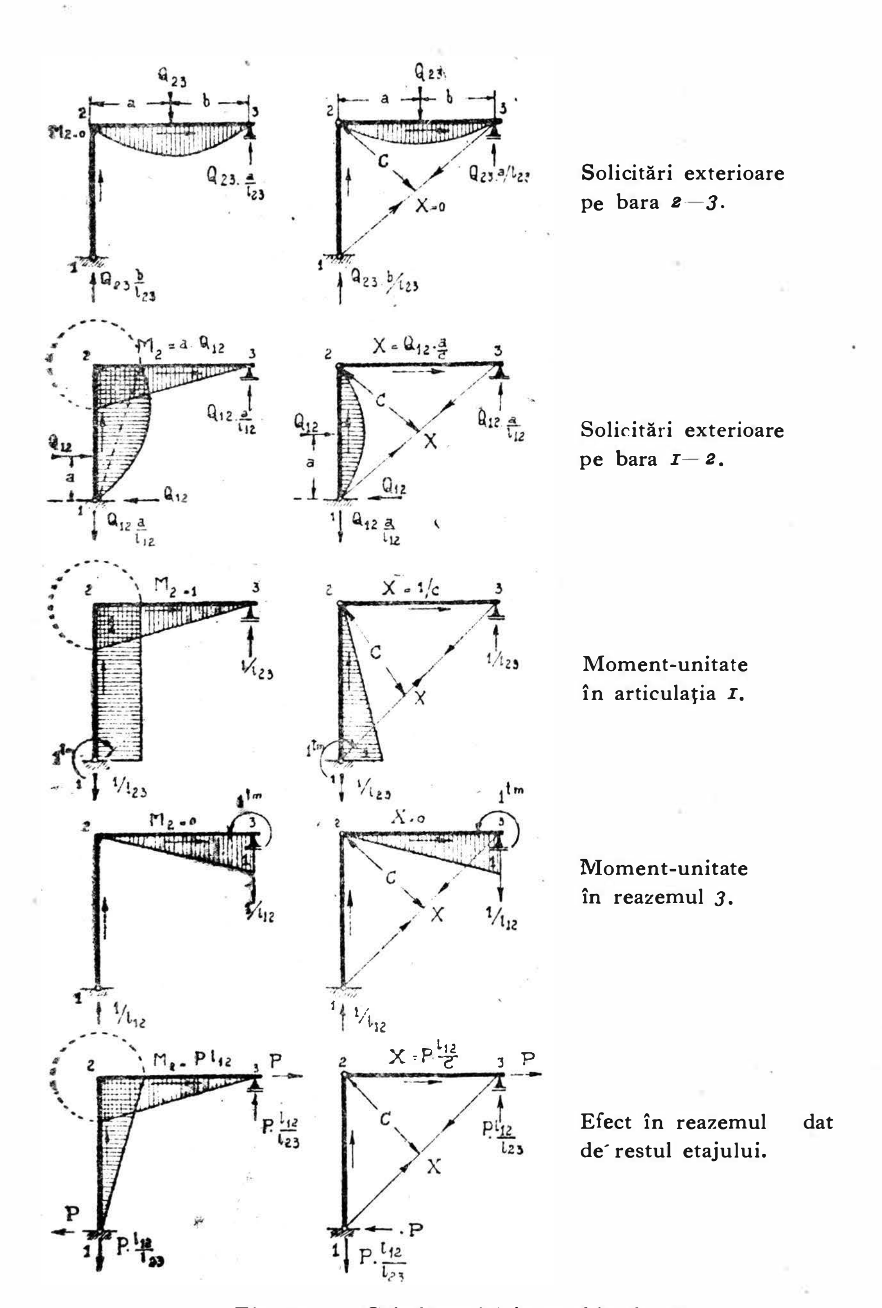


Fig. 12. — Grindă cotită în unghiu drept.

piciorului reprezintă articulaţia, el sprijinind fie în o rezemare, fie în un nod al etajului inferior, care — fiind static nedeformabil — îi asigură fixitatea. Rezemarea la celălalt capăt trebue considerată reazem simplu, deoarece restul etajului nu poate lua reacţiuni orizontale, tocmai grinda cotită asigurând stabilitatea.

Considerând mai întâi o grindă cotită în unghiu drept, pentru diferite cazuri de încărcări, vor apare diagramele de momente arătate în figura 12, prima coloană. In afară de solicitările aplicate direct, este de remarcat cazul ultim, care reprezintă efectul (în un sens sau altul) ce-l resimte grinda cotită dela solicitările de pe restul etajului, de fiecare dată căpătând diagramă de momente pe ambele bare. In nodul *2* apar momentele M_2, care reprezintă efectul de nedeformabilitate al unghiului barelor *1—2* şi *2—3*.

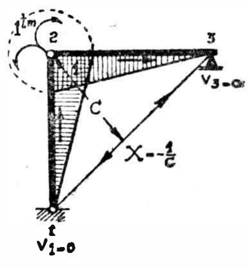


Fig. 13.

Să admitem acum o articulaţie în *2*; spre a menţine starea de static determinare, e necesar să întroducem *o altă legătură*, de exemplu: o bară care să lege capetele *1* şi *3*, fiind considerată *articulată* în aceste puncte cu barele *1—2* şi *2—3*. Sub acţiunea diferitelor solicitări, vor apare *alte* diagrame de momente în cele două bare, în acelaş timp desvoltându-se eforturi axiale X în bara *1—3*, aşa cum se poate vedea în fig. 12, coloana 2-a. Diagramele de momente sunt mult mai simple; se constată în special că, în ultimul caz, care reprezintă efectul ce-l resimte construcţia *1—2—3* dela solicitările de pe restul etajului, *nu apar diagrame de momente.*

Rezultă că, dacă vom considera sistemul static determinat al întregului etaj, cu articulaţie în nodul *2* şi cu bara suplimentară *1—3*, toate diagramele de momente vor rezulta mult mai simple, având mai puţine bare cu suprafeţe de moment; bineînţeles va trebui ţinut seamă şi de solicitările axiale din bara *1—3*, *singurele* care se desvoltă acolo, deci neputând fi neglijate.

Să aplicăm un moment pozitiv, egal cu unitatea, pe cele două feţe ale secţiunii din articulaţia *2* (fig. 13). Se vede imediat că în bara *1—3* va apare o *compresiune* $X = 1/c$; dacă momentul aplicat este M_2, compresiunea va fi $X = M_2/c$.

Considerăm acum întregul sistem static determinat (cu articulaţie în 2) şi aplicând succesiv încărcările exterioare şi cantităţile static nedeterminate, vom obţine o serie de diagrame de momente, pentru fiecare din ele apărând în bara *1—3* o solicitare axială, funcţiune de încărcarea respectivă.

Admiţând semnul + pentru *tensiuni*, sub acţiunea *tuturor* solicitărilor se va desvolta în bara *1—3* o tensiune totală X, egală cu suma solicitărilor axiale parţiale. In această situaţie, aplicăm un moment pozitiv M_2 în articulaţia *2*, care produce o *compresiune* M_2/c în bara *1—3*. Valoarea lui M_2 trebue să fie astfel, încât compresiunea ce se produce să anuleze tensiunea totală existentă, ducând la *zero* solicitarea axială

a barei suplimentare, aceasta putând fi scoasă din construcţiune, fără nici un inconvenient. Va trebui să avem:

(8) $$M_2 = c.X \quad \text{sau} \quad f = M_2 - c.X = 0$$

această relaţie stabilind o legătură necesară între valoarea lui M_2 şi toate celelalte solicitări (exterioare şi cantităţi static nedeterminate).

In cazul când barele grinzii cotite ar forma un unghiu oarecare între ele, lucrurile se petrec analog.

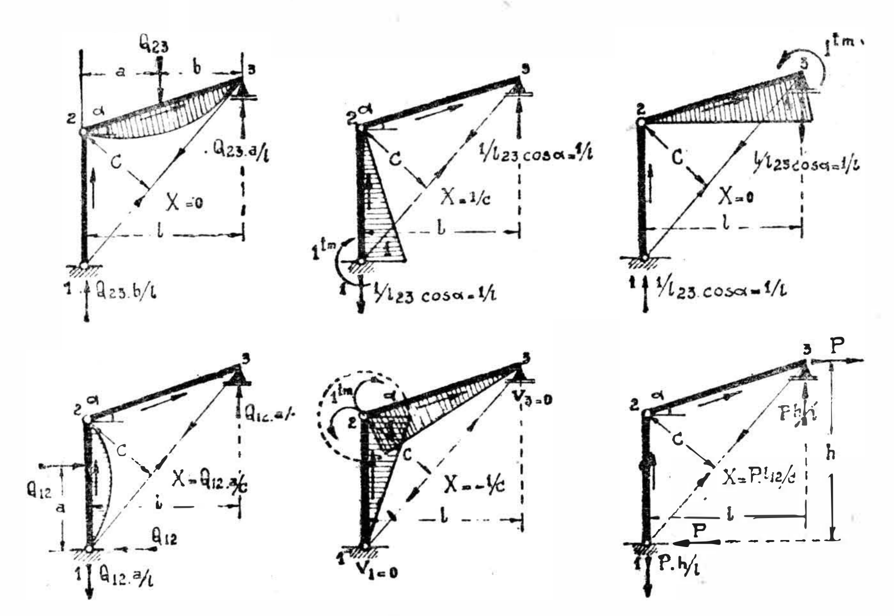


Fig. 14. —Grindă cotită oarecare.

In fig. 14 sunt date diagramele de momente şi eforturile axiale din bara suplimentară, pentru diferite solicitări: încărcări exterioare oarecare pe cele două bare, sau momente egale cu unitatea aplicate în secţiunile *1*, *2* şi *3*; ultimul caz se referă la acţiunea orizontală (de un sens sau altul) ce o poate da restul etajului asupra grinzii cotite. Se constată deosebita simplitate a diagramelor de momente, cât şi a expresiei efortului axial X.

Cu ajutorul celor arătate în fig. 12, 13 şi 14, se vor putea schiţa imediat diagramele corespunzătoare diferitelor forme de cadre, aşa cum se va vedea în exemplele tratate.

Să cercetăm acum ce se petrece cu rotirile din diferitele articulaţii. Considerând iarăşi sistemul static determinat (cu articulaţie în *2*), sub acţiunea fiecăreia din solicitări se vor produce în articulaţii rotiri de forma θ_{is} şi $\theta_{ik}.M_k$. In afară de acestea, va mai apare încă un gen de rotiri. In adevăr, bara *1—3* fiind supusă la tensiune, se va lungi, astfel

că cele două fețe ale secțiunii din articulația *2* se vor roti cu θ_{2x}, aceasta deosebit de celelalte rotiri în *2*, datorite prezenței de diagrame de momente pe barele cadrului.

Bineînțeles că, în toate celelalte articulații, vor apare rotiri analoage θ_{ix}, dat fiind că lungirea barei *1—3* produce deplasări în tot cadrul, ea fiind aceia care menține stabilitatea construcțiunii. Aceste rotiri sunt și ele foarte mici, fiind mereu vorba de deplasări elastice.

Sub acțiunea solicitărilor exterioare, a cantităților static nedeterminate M_1, M_3,... M_n și a tensiunii din bara *1—3*, în o articulație i vom avea o rotire totală:

$$\theta_i = \theta_{i1} . M_1 + \theta_{i3} . M_3 + \ldots + \theta_{in} . M_n + \theta_{is} + \theta_{iX}.$$

Introducând acum momentul M_2 în articulația *2*, acesta va da rotiri, în toate articulațiile, de forma $\theta_{i2} . M_2$.

Pentru ca acest moment M_2 să reprezinte momentul definitiv din nodul *2* al cadrului, va trebui ca valoarea lui să fie astfel, încât prin rotirile ce produce în articulațiile i, să anuleze rotirile existente θ_i, date de relația de mai sus, restabilind nedeformabilitatea unghiului din *2* al cadrului. Va trebui deci:

$$\theta_{i1} . M_1 + \theta_{i2} . M_2 \ldots + \theta_{in} . M_n + \theta_{is} + \theta_{iX} = 0 \tag{9}$$

Se obțin astfel un număr de ecuații de forma (9), egal cu numărul articulațiilor întroduse, pentru a face sistemul static determinat, plus articulația din *2* suplimentară. Cum operația din nodul *2* putea fi făcută în orice alt nod al cadrului, rezultă că oricare din necunoscutele $M_1 \ldots M_n$ poate fi considerată drept cantitatea static nedeterminată suplimentară. Bineînțeles că necunoscutele $M_1 \ldots M_n$ nu mai sunt acum toate variabile independente, ele trebuind să satisfacă relația de legătură (8).

Utilizând acest procedeu, se constată că, pentru fiecare din încastrările ce au rămas în ființă la facerea sistemului static determinat de bază, se adaugă *două* ecuații: una exprimând rotirea nulă în articulația suplimentară întrodusă în acea încastrare, alta arătând că — pentru totalitatea solicitărilor — efortul axial din bara suplimentară, ce servește la menținerea nedeformabilității statice, este nul.

Numărul ecuațiilor crește, în schimb diagramele m_{xi} sunt mult mai simple, astfel că tabloul coeficienților necunoscutelor va prezenta numeroase goluri, ușurând mult rezolvarea.

Mai rămâne să ne ocupăm de evaluarea rotirilor θ_{iX}, ele figurând în sistemul de ecuații.

S'a văzut că, pe baza principiului lucrului mecanic minimal, cantitățile static nedeterminate se desvoltă astfel, încât lucrul mecanic interior — acumulat de construcțiune prin deformație — este minim; derivatele parțiale ale lucrului mecanic, în raport cu fiecare din cantitățile static nedeterminate, vor fi deci nule, toate aceste cantități fiind variabile independente.

In cazul când utilizăm o cantitate static nedeterminată suplimentară, evident că necunoscutele $M_1 \ldots M_n$ nu mai sunt variabile independente, ele trebuind să satisfacă o relaţie de condiţie de forma (8).

La scrierea derivatelor parţiale va trebui să se ţină seamă de această relaţie, cu ajutorul unui coeficient nedeterminat.

Vom avea deci:

$$(10) \qquad \frac{\partial L}{\partial M_1} + \alpha \frac{\partial f}{\partial M_1} = 0; \ldots\ldots \frac{\partial L}{\partial M_n} + \alpha \frac{\partial f}{\partial M_n} = 0$$

Pe de altă parte, rotirea în articulaţia *i*, datorită *diagramelor de momente încovoetoare* din barele cadrului, va fi:

$$\theta_i = \partial L/\partial M_i = \theta_{i1} M_1 + \theta_{i2} M_2 + \ldots + \theta_{in} M_n + \theta_{is}.$$

astfel că relaţia curentă (10) va avea forma:

$$(11) \qquad \theta_{i1}\, M_1 + \theta_{i2}\, M_2 + \ldots + \theta_{in} M_n + \theta_{is} + \alpha \frac{\partial f}{\partial M_i} = 0$$

Comparând această relaţie cu (9), se obţine:

$$\theta_{1X} = \alpha . \partial f / \partial M_1;\ \theta_{2X} = \alpha . \partial f / \partial M_2; \ldots\ \theta_{iX} = \alpha . \partial f / \partial M_i; \ldots$$

deci am găsit expresiile rotirilor de forma θ_{iX}.

Lucrul acesta se poate arăta şi altfel:

Considerăm un cadru făcut static determinat, având suprimată încastrarea din 2, ce-i menţine stabilitatea, introducând în schimb bara suplimentară *1*—*3* (fig. 15). Asupra sa acţionează încărcările exterioare şi cantităţile static nedeterminate, M_1, $M_3 \ldots M_n$.

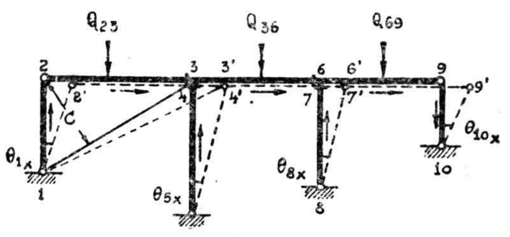


Fig. 15.

Ţinând seama de cazurile arătate în fig. 12, de convenţia de semne a momentelor şi observând că:

— sarcinile verticale de pe barele *2*—*3*—*6*—*9* nu dau solicitări axiale X;

— momentele aplicate în articulaţiile *3* şi *6* de asemenea nu dau valori X, ele producând numai reacţiuni verticale;

— momentul pozitiv din *1* dă $X = M_1/c$;

— momentele pozitive din *5*, 8 şi *9* *trag* de secţiunea *3* cu M_5/l_{54}, M_8/l_{87} M_9 şi$/l_{9,10}$;

— momentele pozitive din 4, 7 și 10 *presează* în secțiunea *3* cu M_5/l_{54}, M_8/l_{87} și $M_{10}/l_{9,10}$;
se vede imediat că solicitarea axială X va fi de forma:

$$c.X = M_1 + (M_5 - M_4)\, l_{12}/l_{54} + (M_8 - M_7)\, l_{12}/l_{87} + (M_9 - M_{10}) l_{12}/l_{9,10}$$

sau ținând seamă de condiția $X = M_2/c$:

$$(12) \qquad (M_1 - M_2) + (M_5 - M_4) l_{12}/l_{54} + (M_8 - M_7) l_{12}/l_{87} + (M_9 - M_{10})\, l_{12}/l_{9,10} = 0$$

care este relația de condiție ce leagă necunoscutele.

Rotirile ce se produc în diferitele articulații — atunci când bara *1—3* se lungește — sunt, considerând $\theta_1 = 1$ și observând că toate nodurile se deplasează pe orizontală cu aceiași cantitate:

$$\theta_1 = -\theta_2 = 1\,;\ \theta_5 = -\theta_4 = l_{12}/l_{54}\,;\ \theta_8 = -\theta_7 = l_{12}/l_{87}$$
$$\text{și} \quad \theta_9 = -\theta_{10} = l_{12}/l_{9,10}$$

așa cum e ușor vizibil în fig. 15.

Se constată că aceste rotiri sunt tocmai derivatele parțiale ale relației $f = 0$ (12), în raport cu necunoscutele articulațiilor considerate.

Dat fiind că lungirea barei *1—3* va da de fapt în *1* o rotire oarecare $\theta_1 \neq 1$, rezultă că rotirile din diferitele articulații vor fi proporționale cu valorile găsite, putând scrie:

$$\theta_{1X} = \alpha . \partial f/\partial M_1, \ldots \theta_{iX} = \alpha . \partial f/\partial M_i, \ldots \theta_{nX} = \alpha . \partial f/\partial M_n$$

factorul de proporționalitate α urmând să rezulte din echilibrarea momentelor M_1, $M_2 \ldots M_n$ și a încărcărilor exterioare, deci din sistemul de ecuații de echilibru elastic.

Am găsit astfel aceleași expresii pentru rotirile de forma θ_{iX}.

Privind figura 15, se vede imediat că relația (12) se poate obține direct, prin aplicarea lucrului mecanic virtual, dând o rotire $\theta_1 = 1$ barei *1—2* din sistemul static determinat, în care am slăbit încastrarea din *2*.

Această observație ne poate scuti de a mai calcula diferitele solicitări axiale din bara suplimentară, pentru obținerea relației de legătură între cantitățile static nedeterminate; este evident că aceste cantități — împreună cu încărcările exterioare — trebuind să reprezinte un sistem în echilibru, vor satisface ecuația lucrului mecanic virtual. Se va ține seamă, cu această ocazie, de convenția de semne admisă pentru momentele de pe diferitele bare.

*
* *

Să ne ocupăm de coeficientul nedeterminat α.

Privind relația de legătură (12), $f = 0$, se vede imediat că derivatele parțiale ale acesteia, în raport cu diferitele momente, sunt rapoarte geometrice rezultând din schema cadrului, reprezentând factori de propagare ai rotirilor în diferitele articulații, față de rotirea $\theta_1 = 1$ dată

în articulația *1*, prin aplicarea lucrului mecanic virtual. Pentru lungirea ce capătă bara *1—3* sub acțiunea solicitărilor axiale, rotirile produse în diferite articulații sunt proporționale cu precedentele; rezultă că diferiții termeni $\alpha\, \partial f / \partial M_i$ sunt *rotiri*, ceia ce reiese de altfel și din omogenitatea sistemului de ecuații. Derivatele parțiale fiind în toate cazurile relații geometrice fără dimensiuni, rezultă că α este o *rotire* și anume aceia pe care o capătă bara *1—2* sub acțiunea lungirei barei suplimentare *1—3*.

Introducerea momentului în articulația suplimentară *2*, va avea de efect anularea rotirilor existente între fețele secțiunii din această articulație, producând totodată un efort axial, după direcția barei *1—3*, egal și de sens contrar celui existent, făcând inutilă această bară, deci restabilind situația inițială. Prin această operație, diferitele articulații *rămân pe loc*, efectul momentului M_2 anulând toate rotirile existente între fețele secțiunilor din articulații, ajungându-se la starea deformată finală a cadrului.

Rezultă deci că *α este rotirea liniei nodurilor 1 și 2 în poziția deformată a construcțiunii*; rotirile liniilor nodurilor celorlalte picioare ale cadrului, se obțin din aceasta, prin aplicarea factorilor de propagare ce figurează în relația de legătură.

Dacă se ține seamă că sistemul de ecuații este multiplicat cu $6\,EI$, rezultă că de fapt rotirea e de forma $\alpha/6EI$, obținându-se astfel valoarea ei numerică.

Bineînțeles că, dacă am avea un cadru etajat, fiecărui etaj îi va corespunde câte un coeficient nedeterminat α_i, ceia ce înseamnă că din rezolvarea sistemului de ecuații și a relațiilor de legătură, odată cu aflarea cantităților static nedeterminate ce ne interesează, am obținut și *deformațiile orizontale ale cadrului*, care se deduc din rotirile $\alpha_i/6EI$.

De sigur că determinarea valorii acestor deplasări nu prezintă — din punct de vedere practic — un interes prea accentuat; faptul însă că ele apar și influențează calculul cantităților iperstatice, sub forma coeficienților nedeterminați, ne permite a face o observațiune foarte importantă.

Mărimea deplasărilor orizontale depinde de încărcările exterioare ce acționează asupra cadrului; de sigur că încărcările orizontale vor avea mult mai accentuat efect, decât cele verticale, în producerea de asemenea deplasări.

Pentru cazul unor încărcări verticale, prezentând oarecare simetrie în raport cu cadrul, e natural ca aceste deplasări orizontale să fie foarte reduse, putându-se deci practic neglija. Este vorba de o aproximație, asupra întinderii căreia e recomandabil a se da toată atențiunea.

In asemenea cazuri, *se admite a priori* că deplasările orizontale sunt nule, deci ar fi vorba de un cadru cu noduri fixe.

Oricare ar fi metoda utilizată în calcul, două întrebări se pot pune cu această ocazie:

— ce simplificări se pot aduce în efectuarea calculelor, pentru ca această aproximație să reprezinte efectiv un avantaj;

— care ar fi modalitatea ca, atunci când se efectuiază calculul complet al cadrului cu noduri deplasabile, să se obţină în paralel şi valorile momentelor pentru ipoteza aproximativă a nodurilor fixe, putându-se astfel examina comparativ valorile, trăgându-se concluziuni asupra admisibilităţii acestui gen de aproximare şi căpătându-se, prin aceasta, experienţă în vederea altor calcule.

Linia de calcul ce am urmărit permite să se răspundă la aceste două aspecte cu multă uşurinţă.

A admite că nodurile sunt fixe, înseamnă a admite că bara 1—3 este *indeformabilă*, deci că *nu vor apare rotiri* în diferitele articulaţii, datorită solicitărilor axiale din această bară, sub acţiunea cantităţilor static nedeterminate şi a încărcărilor exterioare.

Introducerea necunoscutei suplimentare M_2, în articulaţia 2, va trebui să anuleze în toate articulaţiile numai rotirile obţinute din utilizarea diagramelor coeficienţilor de influenţă şi a suprafeţelor de momente date de încărcările exterioare, astfel că rotirile α_i — coeficienţii nedeterminaţi — sunt nule.

Totodată, nodurile fiind presupuse fixe, nici o deplasare virtuală nu e posibilă, astfel că relaţiile de condiţie dispar.

Ajungem la concluzia că, pentru calculul aproximativ cerut de ipoteza nodurilor fixe, vom proceda exact ca în cazul nodurilor deplasabile, cu considerarea necunoscutelor suplimentare — câte una de etaj — şi întroducerea barelor *indeformabile* pentru menţinerea stabilităţii cadrului, ceia ce va păstra considerabila simplificare a diagramelor coeficienţilor de influenţă. Nu vom mai calcula diferitele solicitări axiale în barele suplimentare, deoarece relaţiile de legătură dispar din calcul.

De asemenea dispar termenii ultimi ai ecuaţiilor, de forma $\alpha_i . \partial f / \partial M_i$.

In modul acesta calculul se simplifică sensibil.

Să trecem la al doilea aspect.

In cazul general de calcul, deci al cadrelor cu noduri deplasabile, sistemul de ecuaţii are forma:

$$\theta_{1s} + \theta_{11} M_1 + \theta_{12} M_2 + \ldots + \theta_{1n} M_n + \alpha_1 . \partial f_1 / \partial M_1 + \alpha_2 . \partial f_2 / \partial M_1 + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_{ns} + \theta_{n1} M_1 + \theta_{n2} M_2 + \ldots + \theta_{nn} M_n + \alpha_1 . \partial f_1 / \partial M_n + \alpha_2 . \partial f_2 / \partial M_n + \ldots = 0$$

plus relaţiile de legătură: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ....

Faptul că diagramele coeficienţilor de influenţă au forme foarte simple, face ca în tabloul coeficienţilor θ_{ik} ai momentelor necunoscute, să fie foarte numeroase goluri, ceia ce permite rezolvarea uşoară, prin gruparea ecuaţiilor şi eliminarea progresivă a necunoscutelor. In toată această operaţie coeficienţii nedeterminaţi vor fi menţinuţi *în termenul liber* al ecuaţiei.

Vom ajunge deci să obţinem toate momentele necunoscute în funcţiune de încărcările exterioare şi coeficienţii nedeterminaţi, căpătând

relaţii de forma:

$$M_1 = A_1 + B_1 \alpha_1 + C_1 \alpha_2 + \ldots$$
$$M_2 = A_2 + B_2 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_n = A_n + B_n \alpha_1 + C_n \alpha_2 + \ldots$$

Ducând aceste expresii în relaţiile de legătură, se găsesc valorile coeficienţilor nedeterminaţi şi deci valorile finale ale tuturor cantităţilor static nedeterminate.

Se vede că valoarea fiecărei necunoscute se compune din un termen liber, urmat de termeni cuprinzând coeficienţii nedeterminaţi; în cazul considerării aproximaţiei nodurilor fixe, coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sunt nuli, deci valorile momentelor se reduc la primul termen. Aceasta înseamnă că, atunci când se calculează un cadru cu noduri deplasabile, *obţinem automat* şi valorile tuturor momentelor necunoscute, pentru cazul aproximativ al nodurilor fixe, orice examinare comparativă putându-se face imediat.

Mai mult încă, *influenţa deplasării orizontale a fiecărui etaj figurează în un termen separat*, putându-se deci examina valoarea unor aproximaţii intermediare, considerând noduri fixe la unele etaje — de exemplu cele ce nu suportă sarcini orizontale — şi noduri deplasabile la altele.

Prin noduri fixe la un etaj vom înţelege totdeauna că nodurile aflate pe aceiaşi verticală înainte de deformaţie, rămân pe aceiaşi verticală şi după deformaţie, indiferent dacă tot etajul suferе o deplasare orizontală, provenită dela un etaj inferior.

Avem deci posibilitatea de a face dela început orice ipoteză asupra deformaţiei finale a cadrului, după voinţă, procedând la un calcul exact sau la unul aproximativ; în cazul calculului exact, se obţin în paralel şi elementele necesare, permiţând aprecierea valorii diferitelor ipoteze aproximative ce s'ar putea face.

* * *

Introducerea necunoscutelor suplimentare, la cadrele cu noduri deplasabile, dă organizării de calcul un aspect caracteristic. In afară de numărul normal de ecuaţii de echilibru elastic, corespunzător gradului de nedeterminare, *vor apare în plus câte două ecuaţii* — cu necunoscutele corespunzătoare (momentul din încastrare şi coeficientul nedeterminat al relaţiei de legătură) — pentru fiecare din încastrările ce menţin nedeformabilitatea statică a sistemului static determinat.

Dat fiind că aceste încastrări se reduc în general la numai una pentru fiecare etaj al construcţiunii, rezultă că de fapt numărul de ecuaţii suplimentare va fi *foarte redus*; mai mult încă, importanţa acestui număr — în raport cu sistemul normal de ecuaţii de echilibru elastic — este variabilă, ea depinzând de gradul de nedeterminare al etajului respectiv,

fiind cu atât mai atenuată, cu cât acest grad de nedeterminare este mai ridicat.

Intr'un asemenea caz, creşterea sistemului total — cu două ecuaţii pentru fiecare etaj — este amplu compensată prin simplificările importante ce apar în structura ecuaţiilor.

Rămâne să mai facem o constatare.

Introducerea necunoscutelor suplimentare, după normele ce s'au indicat, apropie în o oarecare măsură linia generală de calcul ce urmărim, de metoda Prof. *Gh. Em. Filipescu.* Relaţiile de legătură (câte una pentru fiecare etaj) găsite prin condiţia efortului nul în toate barele suplimentare, sunt analoage cu relaţiile (*β*) din acea metodă.

Pornind dela ideia scrierii sub formă cât mai simplă a ecuaţiilor, realizabilă prin întroducerea mai multor articulaţii suplimentare în interiorul cadrului şi acceptând consecinţa inevitabilă a creşterii rapide a numărului de necunoscute şi a relaţiilor de legătură, Prof. ***Filipescu*** aplică articulaţii în ambele capete ale tuturor barelor cadrului. Aceasta înseamnă că, înafară de suprimarea încastrărilor ce menţin nedeformabilitatea statică a sistemului static determinat, mai întroduce câte o articulaţie suplimentară în fiecare din nodurile unde se întâlnesc mai mult de două bare, deci câte o necunoscută. Aceasta antrenează apariţia ecuaţiilor de echilibru ale nodurilor — ca relaţii de legătură — fiecare din ele reflectându-se în sistemul de ecuaţii prin intermediul câte unui coeficient nedeterminat.

Se vede deci că, pentru fiecare nod în care se întâlnesc mai mult de două bare, e necesară adăugarea a două necunoscute, cu cele două ecuaţii corespunzătoare.

Remarcăm că, de data aceasta, creşterea numărului de ecuaţii este în directă legătură cu numărul nodurilor interioare, *deci cu gradul de nedeterminare*, ajungându-se la un număr foarte mare de ecuaţii.

Eleganţa deosebită a *metodei coeficienţilor nedeterminaţi* constă în faptul că, fiecare cantitate static nedeterminată dând diagramă de moment numai pe o singură bară, se poate găsi direct valoarea fiecăreia din aceste cantităţi, în funcţie de încărcările exterioare şi coeficienţii nedeterminaţi, astfel că în definitiv sistemul de ecuaţii, ce trebue rezolvat, este constituit numai de grupul relaţiilor de legătură, în număr destul de mare de altfel [1]).

Avantajul organizării de calcul ce propunem, pentru cadrele cu noduri deplasabile, constă în numărul *foarte redus* de ecuaţii suplimentare; totodată structura sistemului de ecuaţii de echilibru elastic este în toate cazurile de aşa natură, încât permite dela început eliminarea unora din necunoscute, restul rezolvării făcându-se pe grupe de 2—3 ecuaţii.

In capitolul ce urmează vom aplica acest mod de calcul asupra câtorva exemple, cu grad mijlociu de nedeterminare, spre a se vedea în detaliu evoluţia şi caracteristicele organizării de calcul.

---

[1]) Gh. Em. Filipescu. Calculul cadrelor. Bul. Soc. Polit. Nr. 2 Febr. 1937.

VI. APLICAREA ORGANIZĂRII DE CALCUL LA CÂTEVA EXEMPLE DE CADRE CU NODURI DEPLASABILE

A. *Cadru cu trei deschideri.*

Schema cadrului, natura rezemărilor şi încărcările sunt arătate în fig. 16. Construcţiunea este de 7 ori static nedeterminată, deci va fi necesară introducerea a. 7 articulaţii, spre a obţine sistemul static determinat de bază, le plasăm astfel:

— câte o articulaţie în încastrările 5 , 8 şi nodul 9;

— câte o articulaţie la partea superioară a stâlpilor 5-4 şi 8-7;

— câte o articulaţie la capetele din dreapta ale barelor 2-3 şi 3-6.

Se constată că rămâne în fiinţă încastrarea din nodul 2.

Inlocuind-o cu o articulaţie, va fi necesară bara suplimentară 1-3, pentru menţinerea nedeformabilităţii statice. Necunoscuta suplimentară M_2, împreună cu cantităţile static nedeterminate din cele 7 articulaţii introduse iniţial, vor forma un total de 8 momente necunoscute, ce urmează a fi calculate. Intre ele va exista o relaţie de legătură, provenind din condiţia ca — sub acţiunea tuturor solicitărilor — efortul axial din 1-3 să fie nul. Aceasta o vom obţine fie sumând eforturile parţiale şi egalând cu zero, fie aplicând direct ecuaţia lucrului mecanic virtual. Relaţia de legătură va interveni în sistemul de ecuaţii prin intermediul coeficientului nedeterminat α.

Sistemul de ecuaţii va fi de forma:

art. 2. $\theta_{22} M_2 + \theta_{23} M_3 + \dots + \theta_{29} M_9 + \theta_{2s} + \alpha\, \delta f/\delta M_2 = 0$

.. ..

art. 9. $\theta_{92} M_2 + \theta_{93} M_3 + \dots + \theta_{99} M_9 + \theta_{9s} + \alpha\, \delta f/\delta M_9 = 0$

plus relaţia de legătură $f = 0$, deci în total 9 ecuaţii cu 9 necunoscute, cu două mai mult decât gradul de nedeterminare, corespunzătoare singurei articulaţii suplimentare introduse.

In fig. 16 sunt arătate curbele de momente ce apar în sistemul static determinat (cu articulaţie în 2 şi bara suplimentară 1-3), sub acţiunea încărcărilor exterioare oarecare pe diferite bare; de asemenea diagramele coeficienţilor de influenţă m_{xi}. In fiecare diagramă s'a indicat şi efortul axial produs în bara 1-3.

Forma foarte simplă a diagramelor arată dela început că tabloul coeficienţilor de influenţă va prezenta numeroase goluri.

E necesar să atragem atenţiunea că, respectând convenţia de semne a momentelor din bare — indicată în figură — momentele pozitive din 2 şi 9 dau rotiri de sens contrar pentru barele 1-2 şi 9-10.

Ecuaţia de legătură, obţinută sumând algebric toate valorile X din diagrame şi multiplicând totul cu c, va avea forma următoare:

$$f = -M_2 + (M_5 - M_4)\, l_{12}/l_{54} + (M_8 - M_7)\, l_{12}/l_{87} + M_9\, l_{12}/l_{9,10} - \\ - Pa.\, l_{12}/l_{87} = 0. \tag{13}$$

Ecuaţiile de echilibru elastic se pot constitui imediat, prin citire directă pe diagrame, ţinând seamă de expresiile rotirilor θ_{ii}, θ_{ik} şi θ_{is}, cât şi de rezultatele tip de integrare.

In tabloul alăturat sunt daţi toţi termenii acestor ecuaţii; se constată că din totalul de 64 coeficienţi ai necunoscutelor $M_2 \dots M_9$, un număr de 38 sunt nuli, ceia ce uşurează considerabil rezolvarea.

Repartiţia golurilor este de aşa natură, încât permite gruparea ecuaţiilor. Astfel ecuaţiile 2, 5 şi 8 conţin numai câte două necunoscute, dintre care una nu mai figurează decât câte o singură dată în restul ecuaţiilor; M_2, M_5 şi M_8 pot fi deci eliminaţi imediat. Ecuaţiile 3 şi 4 — astfel obţinute — nu mai conţin decât trei necunoscute M_3, M_4 şi M_6, putându-se deci găsi valorile primelor două în funcţie de M_6. Exact acelaş lucru se petrece şi cu ecuaţiile 7 şi 9, unde de asemenea putem

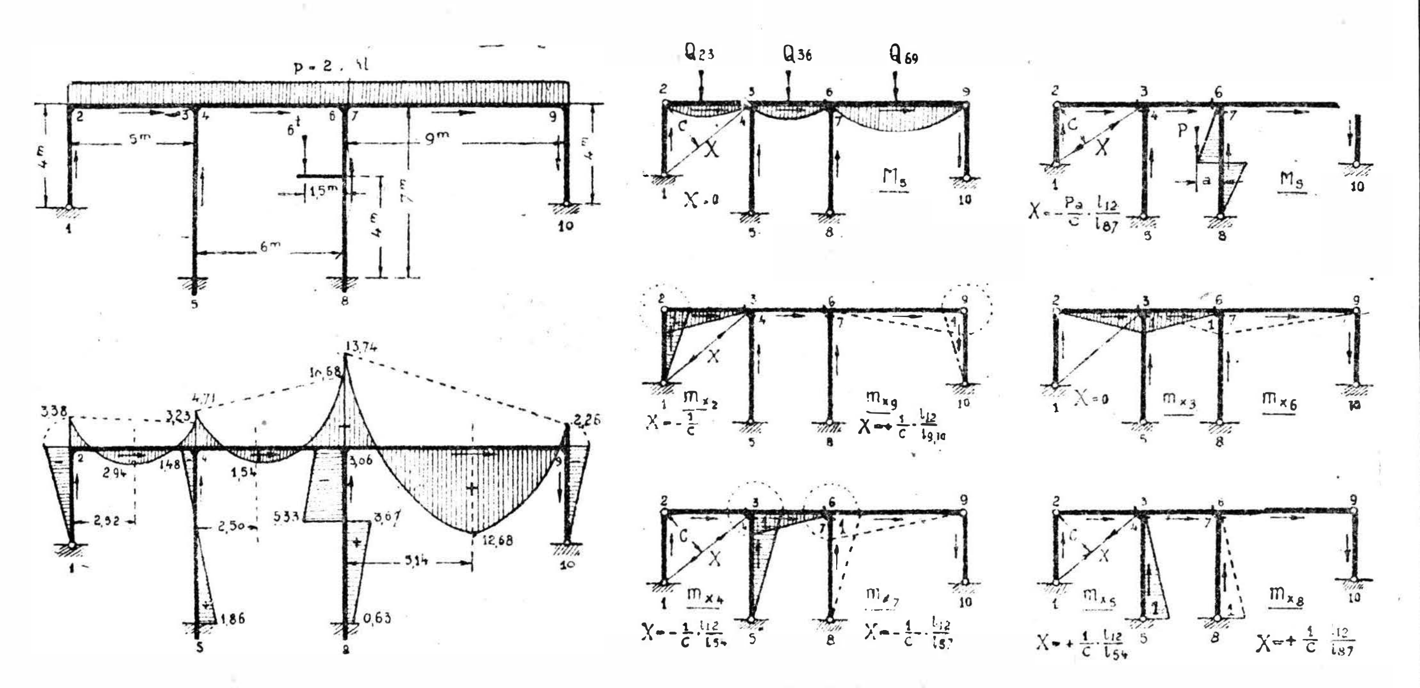


Fig. 16. — Cadru cu trei deschideri.

găsi momentele M_7 şi M_9 în funcţie de M_6. Ducând totul în ecuaţia 6, vom găsi valoarea M_6, singura necunoscută a ecuaţiei.

S'au obţinut astfel toate necunoscutele, în funcţie de încărcările exterioare şi coeficientul nedeterminat α. Introducând aceste expresii în relaţia de legătură $f = 0$, se găseşte şi valoarea acestuia, cu care obţinem valorile finale ale tuturor cantităţilor static nedeterminate.

Trecând la cazul numeric indicat în fig. 16, vom admite pentru $n_{ik} = I / I_{ik}$ următoarele valori:

$$n_{12} = n_{9,10} = 5 \;;\; n_{54} = n_{87} = 4 \;;\; n_{23} = n_{36} = 2 \;;\; n_{69} = 1$$

cu care obţinem caracteristicele barelor $\lambda_{ik} = n_{ik} . l_{ik}$:

$$\lambda_{12} = \lambda_{9,10} = 5.4 = 20 \text{ m} \;;\; \lambda_{54} = \lambda_{87} = 4.7 = 28 \text{ m}$$
$$\lambda_{23} = 2.5 = 10 \text{ m} \;;\; \lambda_{36} = 2.6 = 12 \text{ m} \;;\; \lambda_{69} = 1.9 = 9 \text{ m}.$$

Să formăm termenii liberi θ_{is}, ţinând seama de formulele dela pag. 260.

$$R_{2(2-3)} = 6n_{23}.S_{32}/l_{23} = 6.2.2.5^3/24 \quad = \quad = 125 \text{ tm}^2$$
$$R_{3(2-6)} = 6n_{23}.S_{23}/l_{23} + 6n_{36}.S_{63}/l_{36} = 125 + 216 = 341 \text{ tm}^2$$
$$R_{3(3-6)} = 6n_{36}.S_{63}/l_{36} = 6.2.2.6^3/24 \quad = \quad = 216 \text{ tm}^2$$
$$R_{6(3-9)} = 6n_{36}.S_{36}/l_{36} + 6n_{69}.S_{96}/l_{69} = 216 + 365 = 581 \text{ tm}^2$$
$$R_{6(6-9)} + R_{7(8-7)} = 6n_{69}.S_{96}/l_{69} + 6n_{87}.S_{87}/l_{87} =$$
$$= 6.1.2.9^3/24 - 6.4.6.1,5\,(7^2-3.4^2)/6.7 = \quad = 360 \text{ tm}^3$$
$$R_{8(8-7)} = 6n_{87}.S_{78}/l_{87} = 6.4.6.1,5\,(7^2 - 3.3^2)/6.7 = \quad = 113 \text{ tm}^2$$
$$R_{9(6-9)} = 6n_{69}.S_{69}/l_{69} = 6.1.2.9^3/24 \quad = 365 \text{ tm}^2.$$

Coeficienţii lui α, din ultima coloană a tabloului, sunt:

$$l_{12}/l_{45} = l_{12}/l_{78} = 4/7 = 0,57 \quad ; \quad l_{12}/l_{9,10} = 1.$$

Primele patru ecuaţii sunt, luând $100\,\alpha$ în loc de α:

$$60\,M_2 + 10\,M_3 \qquad + 125 - 100\,\alpha = 0$$
$$10\,M_2 + 44\,M_3 + 24\,M_4 \qquad + 12\,M_6 + 341 \qquad = 0$$
$$24\,M_3 + 80\,M_4 + 28\,M_5 + 12\,M_6 + 216 - 57\,\alpha = 0$$
$$28\,M_4 + 56\,M_5 \qquad + 57\,\alpha = 0.$$

Prima şi ultima dau:

$$M_2 = -0,167\,M_3 - 2,083 + 1,667\,\alpha$$
$$M_5 = -0,500\,M_4 \qquad - 1,017\,\alpha$$

Celelalte două devin:

$$42,33\,M_3 + 24\,M_4 + 12\,M_6 + 321,17 + 16,67\,\alpha = 0$$
$$24\,M_3 + 66\,M_4 + 12\,M_6 + 216 - 85,48\,\alpha = 0$$

de unde:

$$M_3 = -0,227\,M_6 - 7,221 - 1,421\,\alpha$$
$$M_4 = -0,108\,M_6 - 0,647 + 1,812\,\alpha$$

Ultimile trei ecuaţii sunt:

$$18\,M_6 + 74\,M_7 + 28\,M_8 + 9\,M_9 + 360 - 57\,\alpha = 0$$
$$28\,M_7 + 56\,M_8 \qquad + 113 + 57\,\alpha = 0$$
$$9\,M_6 + 9\,M_7 \qquad + 58\,M_9 + 365 + 100\alpha = 0$$

Din cea de a doua scoatem:

$$M_8 = -0,500\,M_7 - 2,018 - 1,017\,\alpha.$$

TABLOU

cuprinzând termenii ecuațiilor de echilibru elastic

		M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9		
Art.	θ_{ik}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}	θ_{i6}	θ_{i7}	θ_{i8}	θ_{i9}	θ_{is}	$\alpha.\delta f/\delta M_i$
2	θ_{2k}	$2(\lambda_{12}+\lambda_{23})$	λ_{23}	—	—	—	—	—	—	$R_2(2\text{-}3)$	$-\alpha$
3	θ_{3k}	λ_{23}	$2(\lambda_{23}+\lambda_{36})$	$2\lambda_{36}$	—	λ_{36}	—	—	—	$R_3(2\text{-}6)$	—
4	θ_{4k}	—	$2\lambda_{36}$	$2(\lambda_{54}+\lambda_{36})$	λ_{54}	λ_{36}	—	—	—	$R_3(3\text{-}6)$	$-\alpha.l_{12}/l_{54}$
5	θ_{5k}	—	—	λ_{54}	$2\lambda_{54}$	—	—	—	—	—	$+\alpha.l_{12}/l_{54}$
6	θ_{6k}	—	λ_{36}	λ_{36}	—	$2(\lambda_{36}+\lambda_{69})$	$2\lambda_{69}$	—	λ_{69}	$R_6(3\text{-}9)$	—
7	θ_{7k}	—	—	—	—	$2\lambda_{69}$	$2(\lambda_{87}+\lambda_{69})$	λ_{87}	λ_{69}	$R_6(6\text{-}9)+R_7(8\text{-}7)$	$-\alpha.l_{12}/l_{87}$
8	θ_{8k}	—	—	—	—	—	λ_{87}	$2\lambda_{87}$	—	$R_8(3\text{-}7)$	$+\alpha.l_{12}/l_{87}$
9	θ_{9k}	—	—	—	—	λ_{69}	λ_{69}	—	$2(\lambda_{69}+\lambda_{9,10})$	$R_9(6\text{-}9)$	$+\alpha.l_{12}/l_{9,10}$

Celelalte două devin:

$$18\,M_6 + 60\,M_7 + 9\,M_9 + 303{,}50 - 85{,}50\,\alpha = 0$$
$$9\,M_6 + 9\,M_7 + 58\,M_9 + 365 + 100\,\alpha = 0$$

de unde:

$$M_7 = -0{,}285\,M_6 - 4{,}211 + 1{,}725\,\alpha$$
$$M_9 = -0{,}111\,M_6 - 5{,}640 - 1{,}992\,\alpha.$$

Ecuaţia articulaţiei 6 este:

$$12\,M_3 + 12\,M_4 + 42\,M_6 + 18\,M_7 + 9\,M_9 + 581 = 0$$

ducând valorile găsite pentru M_3, M_4, M_7 şi M_9 se obţine:

$$M_6 = -11{,}303 - 0{,}559\,\alpha$$

Inlocuind această valoare în toate relaţiile, se găseşte:

(14)
$$\begin{aligned} M_2 &= -\ 1{,}306 + 1{,}883\,\alpha \\ M_3 &= -\ 4{,}655 - 1{,}294\,\alpha \\ M_4 &= +\ 0{,}574 + 1{,}872\,\alpha \\ M_5 &= -\ 0{,}287 - 1{,}953\,\alpha \\ M_6 &= -\ 11{,}303 - 0{,}559\,\alpha \\ M_7 &= -\ 0{,}990 + 1{,}884\,\alpha \\ M_8 &= -\ 1{,}523 - 1{,}959\,\alpha \\ M_9 &= -\ 4{,}385 - 1{,}930\,\alpha \end{aligned}$$

Aceste expresii se introduc în relaţia de condiţie $f = 0$ (13), găsindu-se valoarea coeficientului nedeterminat: $\alpha = -1{,}10$, cu ajutorul căruia obţinem valorile definitive ale momentelor:

$M_2 = -3{,}38\ tm$; $M_3 = -3{,}23\ tm$; $M_4 = -1{,}48\ tm$
$M_5 = +1{,}86\ tm$; $M_6 = -10{,}68\ tm$; $M_7 = -3{,}06\ tm$
$M_8 = +0{,}63\ tm$; $M_9 = -2{,}26\ tm$

Se poate trasa acum diagrama momentelor încovoetoare din cadru, arătată în fig. 16.

Solicitările axiale din bare (+ compresiuni) sunt:

$$N_{12} = 5 + (M_3 - M_2)/l_{23} = 5{,}03\ \text{t.}$$
$$N_{45} = 5 + 6 + (M_2 - M_3)/l_{23} + (M_6 - M_3 - M_4)/l_{36} = 9{,}98\ \text{t.}$$
$$N_{78} = 6 + 9 + (M_3 + M_4 - M_6)/l_{36} + (M_9 - M_6 - M_7)/l_{69} = 17{,}27\ \text{t.}$$

+ 6 tone pe partea inferioară.

$$N_{9,10} = 9 + (M_6 + M_7 - M_9)/l_{69} = 7{,}72\ \text{t.}$$
$$N_{12} = -M_2/l_{12} = 0{,}85\ \text{t.}$$
$$N_{36} = -M_2/l_{12} + (M_5 - M_4)/l_{45} = 1{,}34\ \text{t.}$$
$$N_{69} = -M_9/l_{9,10} = 0{,}57\ \text{t.}$$

Echilibrul nodului 6,7 cere:

$$N_{36} = N_{69} + 6.1{,}5/7 + (M_7 - M_8)/l_{87}$$ care este îndeplinită.

Valoarea *negativă* a lui α arată că, prin deformaţie, grinda 2-3-6-9 se deplasează spre ***stânga***. Unghiul de rotire al dreptei ce uneşte nodurile 1 cu 2, va fi în poziţia deformată de forma $\alpha/6EI$, unde va trebui ţinut seamă că valoarea reală este $\alpha = -110$ şi că în ecuaţii unităţile întrebuinţate au fost *tona* şi *metrul*.

Privind grupul de relaţii (14), constatăm că valorile necunoscutelor sunt compuse din doi termeni, cel de al doilea fiind funcţiune de coeficientul nedeterminat α. S'a arătat că acest coeficient reprezintă rotirea *liniei nodurilor* 1-2, în starea deformată a cadrului, deci efectul deplasării orizontale a nodurilor cadrului, în urma deformaţiei.

In cazul când s'ar admite aproximaţia că nodurile rămân *fixe* ca poziţie în plan, înseamnă că linia nodurilor 1-2 rămâne verticală, deci coeficientul nedeterminat α este nul.

In acest caz vom avea evident *alte* valori pentru cantităţile static nedeterminate, care se obţin imediat din relaţiile (14) făcând peste tot $\alpha = 0$. Deci primii termeni din aceste relaţii reprezintă tocmai valorile momentelor în ipoteza aproximativă a nodurilor fixe, iar cei de al doilea termeni corecţia provenită din considerarea deformaţiei reale, deci ţinând seamă de deplasarea orizontală a nodurilor. Comparaţia celor două cazuri e dată în tabloul următor:

TABLOU COMPARATIV

al valorilor $M_2 \ldots M_9$ pentru noduri deplasabile sau fixe. Valori în tm.

Moment	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
Noduri deplasabile . . .	— 3,38	— 3,23	— 1,48	+ 1,86	— 10,68	— 3,06	+ 0,63	— 2,26
Noduri fixe	— 1,31	— 4,65	+ 0,57	— 0,29	— 11,30	— 0,99	— 1,52	— 4,38

Se constată diferenţe sensibile între valorile corespunzătoare celor două cazuri. Dacă aproximaţia nodurilor fixe ar fi fost admisă *dela începutul calculului*, rezolvarea s'ar fi simplificat şi mai mult, termenii ultimi ai ecuaţiilor — funcţiuni de α — anulându-se, iar relaţia de legătură $f = 0$ dispărând din calcul.

B. *Cadru cu două etaje, dublu încastrat.*

Schema cadrului şi încărcările exterioare sunt arătate în fig. 17. Pentru stabilirea gradului de nedeterminare, se procedează aşa cum s'a arătat în capitolul II. Vom avea:

a) *necunoscute*:

— bare încastrate 6 a 6 necunoscute = 36
— rezemări .... 2 a 3 » = 6
Total . . . 42 necunoscute

b) *relaţii statice*:

— bare . . . . . 6 a 3 relaţii = 18
— noduri şi rezemări 6 a 3 » = 18
Total . . . 36 relaţii

Diferenţa 42 — 36 = 6 arată că sistemul e de 6 ori static nedeterminat, deci va fi necesară introducerea a 6 articulaţii. Se vede imediat că articulaţiile vor trebui distribuite câte 3 pentru fiecare etaj, astfel ca şi părţile componente ale construcţiunii să fie static determinate. Vom introduce:

— câte o articulaţie în încastrările 1 şi 8,
— câte una în secţiunile 3 şi 6 ale stâlpilor 3-4 şi 5-6,
— o articulaţie în nodul 5, iar alta în secţiunea 7 a barei 2-7.

Se constată că rămân în fiinţă două încastrări: în nodul 4 şi în secţiunea 2, între barele 1-2 şi 2-7. Inlocuindu-le cu articulaţii, va fi necesară introducerea barelor suplimentare 1-7 şi 3-5, fiecare din ele asigurând nedeformabilitatea statică a unui etaj.

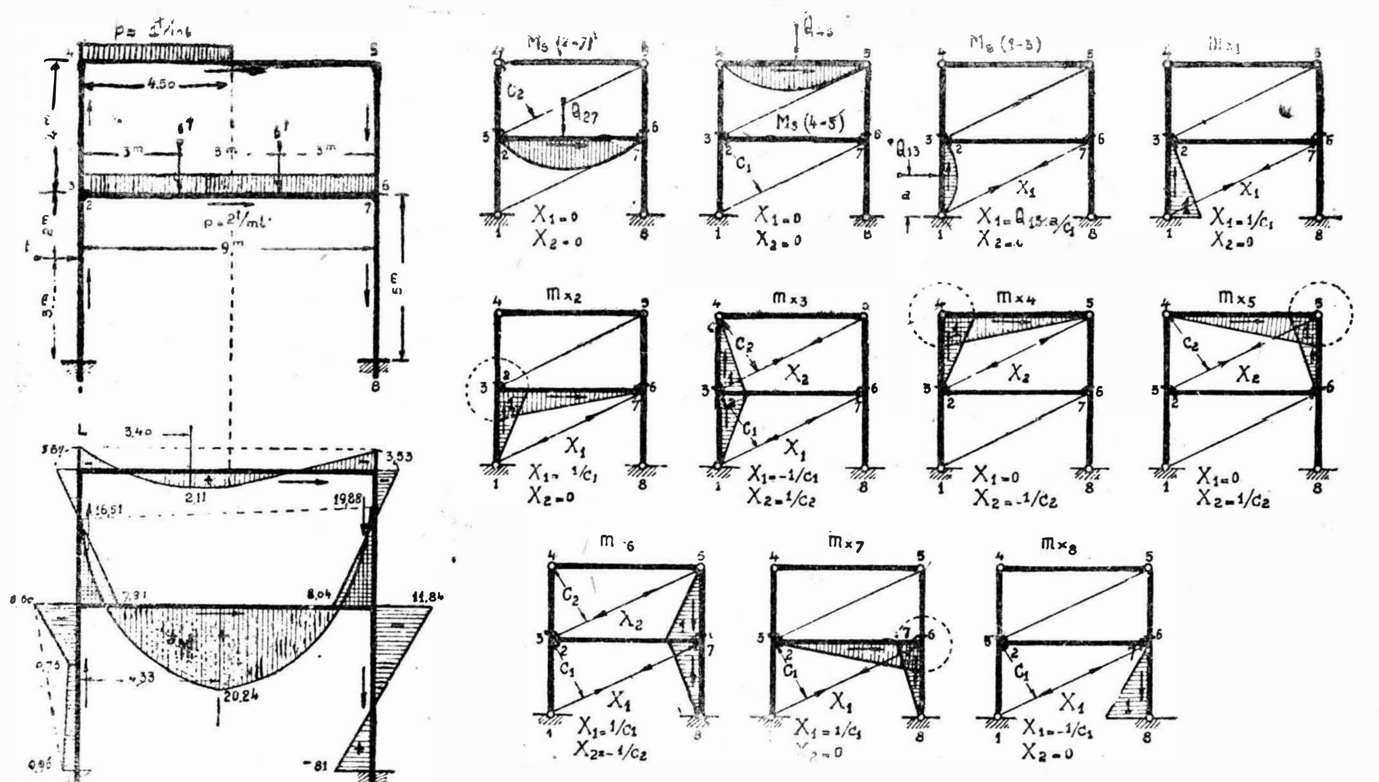


Fig. 17. — Cadru cu două etaje, dublu încastrat.

TABLOU

cuprinzând termenii ecuațiilor de echilibru elastic

		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8			
Art.	θ_{ik}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}	θ_{i6}	θ_{i7}	θ_{i8}	θ_{is}	$\alpha . \delta f_1 / \delta M_i$	$\beta . \delta f_2 / \delta M_i$
1	θ_{1k}	$2\lambda_{13}$	λ_{13}	λ_{13}	—	—	—	—	—	$R_1(1-3)$	$+\alpha$	—
2	θ_{2k}	λ_{13}	$2(\lambda_{13}+\lambda_{27})$	$2\lambda_{13}$	—	—	—	λ_{27}	—	$R_2(2-7)+R_3(1-3)$	$-\alpha$	—
3	θ_{3k}	λ_{13}	$2\lambda_{13}$	$2(\lambda_{13}+\lambda_{34})$	λ_{34}	—	—	—	—	$R_3(1-3)$	$-\alpha$	$+\beta$
4	θ_{4k}	—	—	λ_{34}	$2(\lambda_{34}+\lambda_{45})$	λ_{45}	—	—	—	$R_4(4-5)$	—	$-\beta$
5	θ_{5k}	—	—	—	λ_{15}	$2(\lambda_{45}+\lambda_{56})$	λ_{56}	—	—	$R_5(4-5)$	—	$+\beta$
6	θ_{6k}	—	—	—	—	λ_{56}	$2(\lambda_{56}+\lambda_{68})$	$2\lambda_{68}$	λ_{68}	—	$+\alpha$	$-\beta$
7	θ_{7k}	—	λ_{37}	—	—	—	$2\lambda_{68}$	$2(\lambda_{27}+\lambda_{68})$	λ_{58}	$R_7(2-7)$	$+\alpha$	—
8	θ_{8k}	—	—	—	—	—	λ_{68}	λ_{68}	$2\lambda_{68}$	—	$-\alpha$	—

Necunoscutele suplimentare M_2 și M_4, împreună cu cantitățile static nedeterminate din cele 6 articulații inițiale, vor forma un total de 8 momente necunoscute, ce urmează a fi calculate. Intre ele vor exista două relații de legătură $f_1 = 0$ și $f_2 = 0$, provenind din condiția ca — sub acțiunea tuturor solicitărilor — eforturile din barele suplimentare 1-7 și 3-5 să fie nule. Aceste relații de legătură vor interveni în ecuațiile de echilibru elastic prin intermediul a doi coeficienți nedeterminați α și β.

Ecuațiile de echilibru elastic vor fi de forma:

$$\text{art. 1} \quad \theta_{11}M_1 + \theta_{12}M_2 + \ldots + \theta_{18}M_8 + \theta_{1s} + \alpha.\delta f_1/\delta M_1 + \beta.\delta f_2/\delta M_1 = 0$$

. . . .

$$\text{art. 8} \quad \theta_{81}M_1 + \theta_{82}M_2 + \ldots + \theta_{88}M_8 + \theta_{8s} + \alpha.\delta f_1/\delta M_8 + \beta.\delta f_2/\delta M_8 = 0$$

plus cele două relații de legătură, deci în total 10 ecuații cu 10 necunoscute, cu patru mai mult decât gradul de nedeterminare, corespunzătoare celor două articulații suplimentare.

In fig. 17 sunt date atât curbele de momente, ce apar în sistemul static determinat sub acțiunea încărcărilor oarecare pe barele 1-3, 4-5 și 2-7, cât și diagramele coeficienților de influență m_{xi}, fiecare caz având indicate valorile X_1 și X_2 ale solicitărilor axiale din barele suplimentare. Trasarea acestora se face ținând seamă de cazurile arătate în figurile 12 și 13, cât și de reacțiunile ce desvoltă una din bare asupra celorlalte, atunci când i se aplică momente în secțiunile dela capete.

Relațiile de legătură se obțin sumând algebric valorile X_1 resp. X_2, corespunzătoare tuturor diagramelor și multiplicându-le cu c_1 resp. c_2. Vom avea:

$$(15) \quad \begin{aligned} f_1 &= M_1 - M_2 - M_3 + M_6 + M_7 - M_8 + Q_{13} \cdot \alpha = 0 \\ f_2 &= M_2 - M_4 + M_5 - M_3 = 0. \end{aligned}$$

Se constată că aceste relații sunt identice cu acelea ce s'ar obține aplicând ecuația lucrului mecanic virtual, dând fiecărui etaj o deplasare $\theta_i = 1$. Astfel, pentru etajul inferior vom considera $\theta_1 = 1$, iar pentru cel superior $\theta_3 = 1$, așa cum se vede în fig. 18. Forma dreptunghiulară a ambelor etaje face ca rotirile din toate articulațiile să fie egale, diferind numai semnul, pentru fixarea căruia se ține seamă de convenția de semne admisă pe diferitele bare; astfel vor fi de semne contrare rotirile θ_1 și θ_8 din primul caz, sau θ_3 și θ_4 din al doilea.

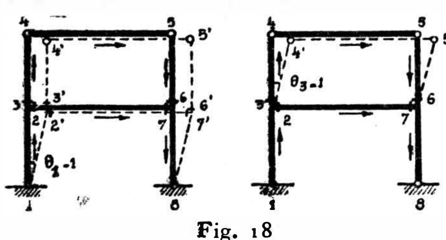


Fig. 18

Rezultă că relațiile $f_1 = 0$ și $f_2 = 0$ puteau fi scrise direct, dând construcțiunii toate deplasările virtuale *diferite* posibile (în cazul de față două) și scriind ecuațiile corespunzătoare; acest procedeu ar fi economisit scrierea în toate diagramele a valorilor X_1 și X_2.

Ecuațiile de echilibru elastic se pot constitui imediat, prin citire directă pe diagrame, ținând seamă de expresiile rotirilor θ_{ii}, θ_{ik} și θ_{is}, cât și de rezultatele tip de integrare.

In tablou sunt dați toți termenii acestor ecuații; din totalul de 64 coeficienți ai necunoscutelor $M_1 \ldots M_8$, sunt nuli 36. Repartiția golurilor e de așa natură, încât permite gruparea ecuațiilor, așa cum se va vedea la calculul numeric.

Vom calcula mai întâi toate valorile $M_1 \ldots M_8$ funcție de încărcările exterioare și coeficienții nedeterminați α și β; ducând în relațiile de legătură, vor rezulta și acești coeficienți, deci se vor obține valorile definitive ale cantităților static nedeterminate.

Trecând la cazul numeric indicat în fig. 17, vom admite:

$$n_{13} = n_{68} = 3 \; ; \quad n_{34} = n_{56} = 4 \; ; \quad n_{45} = 2 \quad ; \quad n_{27} = 1$$

astfel că valorile $\lambda_{ik} = n_{ik} \cdot l_{ik}$ vor fi:

$$\lambda_{13} = \lambda_{68} = 15 \text{ m}; \quad \lambda_{34} = \lambda_{56} = 16 \text{ m}; \quad \lambda_{45} = 18 \text{ m}; \quad \lambda_{27} = 9 \text{ m}$$

Formăm termenii liberi θ_{is}, ţinând seamă de formulele dela pag. 260.

$$R_1(1-3) = 6n_{13} . S_{31}/l_{13} = 6.3.4.3.2\,(5+2)/6.5 \qquad = 101 \text{ tm}^2$$
$$R_3(1-3) = 6n_{13} . S_{13}/l_{13} = 6.3.4.3.2\,(5+3)/6.5 \qquad = 115 \text{ tm}^2$$
$$R_2(2-7) = R_7(2-7) = 6n_{27} . S_{27}/l_{27} = 6.1.2.9^3/24 + 6.1.6.9^2/9 = 689 \text{ tm}^2$$
$$R_4(4-5) = 6n_{45} . S_{54}/l_{45} = 6.2.3.1.9^3/16.8 \qquad = 205 \text{ tm}^2$$
$$R_5(4-5) = 6n_{45} . S_{45}/l_{45} = 6.2.7.1.9^3/48.8 \qquad = 159 \text{ tm}^2$$

Ecuaţiile 1 şi 3 sunt, introducând valorile λ_{ik} şi considerând $100\,\alpha$ resp. $100\,\beta$ în loc de α şi β.

$$30\,M_1 + 15\,M_2 + 15\,M_3 + 101 + 100\,\alpha = 0$$
$$15\,M_1 + 30\,M_2 + 62\,M_3 + 16\,M_4 + 115 - 100\,\alpha + 100\,\beta = 0$$

din care obţinem:

$$15\,M_1 = 32/3\,M_3 + 16/3\,M_4 - 29 - 100\,\alpha + 100/3 . \beta$$
$$15\,M_2 = -\,109/3\,M_3 - 32/3\,M_4 - 43 + 100\,\alpha - 200/3 . \beta$$

Ecuaţiile 6 şi 8 sunt:

$$16\,M_5 + 62\,M_6 + 30\,M_7 + 15\,M_8 + 100\,\alpha - 100\,\beta = 0$$
$$15\,M_6 + 15\,M_7 + 30\,M_8 - 100\,\alpha = 0$$

de unde:

$$15\,M_7 = -\,32/3\,M_5 - 109/3\,M_6 - 100\,\alpha + 200/3 . \beta$$
$$15\,M_8 = 16/3\,M_5 + 32/3\,M_6 + 100\,\alpha - 100/3 . \beta$$

Ecuaţiile 4 şi 5 sunt:

$$16\,M_3 + 68\,M_4 + 18\,M_5 + 205 - 100\,\beta = 0$$
$$18\,M_4 + 68\,M_5 + 16\,M_6 + 159 + 100\,\beta = 0$$

din care:

$$16\,M_3 = -\,68\,M_4 - 18\,M_5 - 205 + 100\,\beta$$
$$16\,M_6 = -\,18\,M_4 - 68\,M_5 - 159 - 100\,\beta$$

ducând aceste valori în expresiile M_1, M_2, M_7 şi M_8 se obţine:

$$15\,M_1 = -\,40\,M_4 - 12\,M_5 - 497/3 - 100\,\alpha + 100\,\beta$$
$$48\,M_2 = 460\,M_4 + 130{,}8\,M_5 + 1352 + 320\,\alpha - 940\,\beta$$
$$48\,M_7 = 130{,}8\,M_4 + 460\,M_5 + 1155 - 320\,\alpha + 940\,\beta$$
$$15\,M_8 = -\,12\,M_4 - 40\,M_5 - 106 + 100\,\alpha - 100\,\beta$$

Ecuaţiile 2 şi 7 sunt de forma:

$$15\,M_1 + 48\,M_2 + 30\,M_3 + 9\,M_7 + 804 - 100\,\alpha = 0$$
$$9\,M_2 + 30\,M_6 + 48\,M_7 + 15\,M_8 + 689 + 100\,\alpha = 0$$

care devin, ţinând seamă de expresiile diferitelor momente:

$$M_4 + 0,54\, M_5 + 5,75 + 0,19\, \alpha - 1,50\, \beta = 0$$
$$M_4 + 1,85\, M_5 + 9,88 - 0,35\, \alpha + 2,78\, \beta = 0$$

de unde:

$$M_4 = -\, 4,047 - 0,412\, \alpha + 3,267\, \beta$$
$$M_5 = -\, 3,153 + 0,412\, \alpha - 3,267\, \beta$$

Ducând aceste valori în expresiile tuturor momentelor, se obţine:

$$M_1 = +\ 2,27 - 5,898\, \alpha + 0,568\, \beta$$
$$M_2 = -\, 19,21 + 3,841\, \alpha + 2,824\, \beta$$
$$M_3 = +\ 7,93 + 1,287\, \alpha - 3,960\, \beta$$
$$M_4 = -\ 4,05 - 0,412\, \alpha + 3,267\, \beta$$
$$M_5 = -\ 3,15 + 0,412\, \alpha - 3,267\, \beta$$
$$M_6 = +\ 8,02 - 1,287\, \alpha + 3,960\, \beta$$
$$M_7 = -\, 17,18 - 3,841\, \alpha - 2,824\, \beta$$
$$M_8 = +\, 4,58 + 5,898\, \alpha - 0,568\, \beta$$

Relaţiile de mai sus arată efectul simetriei cadrului asupra valorilor diferitelor momente. Primul termen e influenţat de încărcările exterioare, ceilalţi doi reprezentând efectul deplasărilor orizontale ale nodurilor celor două etaje (termenul în α pentru etajul inferior, cel în β pentru etajul superior).

Dat fiind că — în raport cu o axă verticală — secţiunile 1, 2, 3 şi 4 sunt simetrice cu 8, 7, 6, 5 şi ţinând seamă de convenţia de semne admisă, rezultă că deplasările orizontale ale nodurilor vor trebui să conducă la apariţia de termeni egali şi de semn contrar, în valorile momentelor corespunzătoare la 2 secţiuni simetrice, condiţie care e îndeplinită în expresiile găsite.

Inlocuind valorile momentelor în relaţiile de legătură (15), se ajunge la următoarele ecuaţii:

$$10\, \alpha - \ 1,545\, \beta - 5,356 = 0$$
$$10\, \alpha - 42,536\, \beta + 2,384 = 0$$

din care se obţine:

$$\alpha = +\, 0,565\,; \qquad \beta = +\, 0,189$$

S'a văzut semnificaţia acestor doi coeficienţi nedeterminaţi; ei reprezintă rotirea *liniei* nodurilor *1-3* resp. *3-4* în poziţia deformată a cadrului. Pentru obţinerea valorii numerice a acestor rotiri, va trebui ţinut seamă că în ecuaţii am luat $100\, \alpha$ resp. $100\, \beta$ în loc de α resp. β, deasemenea că toate ecuaţiile au fost multiplicate cu 6EI; rezultă că valorile acestor rotiri sunt:

$$56,5/6EI \quad \text{şi} \quad 18,9/6EI$$

Semnul pozitiv indică deplasarea *spre dreapta* a barelor orizontale 2-7 şi 4-5; bine înţeles că, pentru etajul superior, poziţia de referinţă este starea *deformată* a etajului inferior.

Ţinând seamă că expresiile momentelor sunt de forma:

$$M_i = A_i + B_i . \alpha + C_i . \beta$$

se vede imediat că primul termen reprezintă momentul în ipoteza nodurilor fixe, în timp ce ceilalţi doi termeni sunt corecţiile ce trebuesc aduse, datorită considerării deplasării orizontale a nodurilor; termenul $B_i . \alpha$ se referă la deplasarea etajului inferior, iar $C_i . \beta$ la a celui superior. Această situaţie permite ca — din expresiile

găsite — să se poată calcula valorile momentelor în diferitele secţiuni unde s'au introdus articulaţii, atât în cazul real al nodurilor deplasabile, cât şi în diferite ipoteze aproximative, neglijând deplasările orizontale ale unuia sau a ambelor etaje.

Tabloul ce urmează dă aceste valori, putându-se trage concluziuni comparative asupra întinderii aproximaţiilor în diferite cazuri:

— $\beta = 0$ etajul inferior deplasabil, cel superior fix

— $\alpha = 0$ etajul superior deplasabil, cel inferior fix

— $\alpha = \beta = 0$ cadru cu noduri fixe.

TABLOU

cuprinzând valorile momentelor în diferite ipoteze. Valori în tm.

M_i	A_i	$B_i.\alpha$	$C_i.\beta$	Noduri depl.	$\beta = 0$	$\alpha = 0$	Noduri fixe
M_1	+ 2,27	— 3,332	+ 0,107	— 0,96	— 1,06	+ 2,38	+ 2,27
M_2	— 19,21	+ 2,170	+ 0,534	— 16,51	— 17,04	— 18,68	— 19,21
M_3	+ 7,93	+ 0,727	— 0,748	+ 7,91	+ 8,66	+ 7,18	+ 7,93
M_4	— 4,05	— 0,233	+ 0,617	— 3,67	— 4,28	— 3,43	— 4,05
M_5	— 3,15	+ 0,233	— 0,617	— 3,53	— 2,92	— 3,77	— 3,15
M_6	+ 8,02	— 0,727	+ 0,748	+ 8,04	+ 7,29	+ 8,77	+ 8,02
M_7	— 17,18	— 2,170	— 0,534	— 19,88	— 19,35	— 17,71	— 17,18
M_8	+ 4,58	+ 3,332	— 0,107	+ 7,81	+ 7,91	+ 4,47	+ 4,58

Cifrele din tablou arată că admiterea aproximaţiei fixităţii nodurilor etajului superior, nu conduce la diferenţe apreciabile, dat fiind că în această porţiune nu acţionează solicitări exterioare orizontale, iar disimetria încărcărilor verticale este destul de redusă.

Considerarea dela începutul calculului a unei ipoteze aproximative, ar fi adus importante simplificări în rezolvare, prin dispariţia unuia sau a ambilor coeficienţi nedeterminaţi, cât şi a relaţiilor de legătură corespunzătoare.

Pe baza valorilor indicate în tablou, pentru cazul real al nodurilor deplasabile, s'a trasat diagrama definitivă de momente încovoetoare, arătată în fig. 17.

Solicitările axiale în bare sunt:

$N_{34} = 4{,}5.1.6{,}75/9 + (M_5 - M_4)/9 = 3{,}39$ tone

$N_{56} = 4{,}5.1.2{,}25/9 + (M_4 - M_5)/9 = 1{,}11$,,

$N_{12} = N_{34} + 6 + 9 + (M_7 - M_2)/9 = 18{,}02$,,

$N_{68} = N_{56} + 6 + 9 + (M_2 - M_7)/9 = 16{,}48$,,

$N_{45} = (M_3 - M_4)/4 = (M_6 - M_5)/4 = 2{,}89$,, compresiune

$N_{27} = (M_8 - M_7 - M_6)/5 - N_{45} =$

$= 4.3/5 + (M_1 - M_2 - M_3)/5 - N_{45} = 1{,}04$ tone compres.

Am obţinut astfel toate elementele necesare pentru dimensionarea cadrului.

C. *Cadru cu două deschideri, de înălţimi diferite, triplu încastrat.*

Schema cadrului şi încărcările sunt arătate în fig. 19.

Stabilirea gradului de nedeterminare:

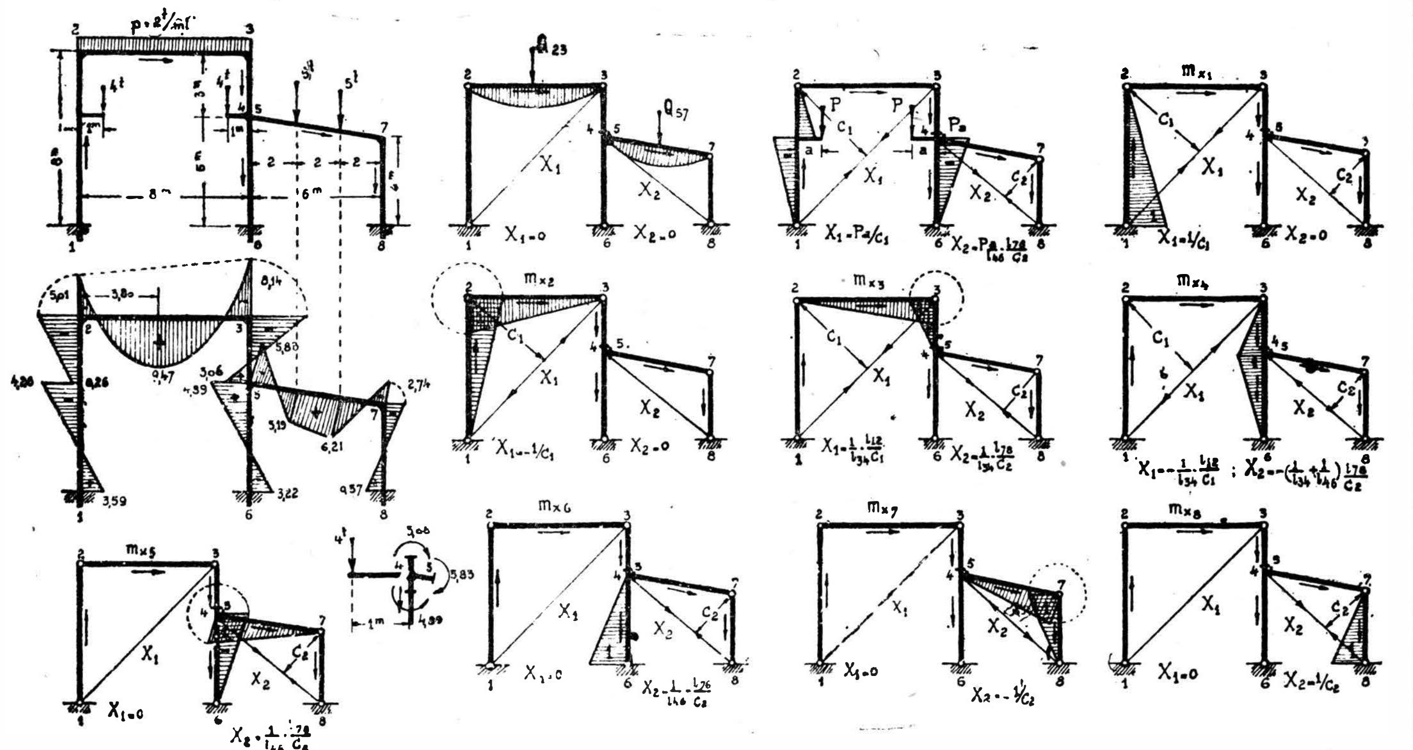


Fig. 19. — Cadru cu două deschideri, de înălțimi diferite, triplu încastrat.

TABLOU

cuprinzând termenii ecuațiilor de echilibru elastic

		M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8			
Art.	θ_{ik}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}	θ_{i6}	θ_{i7}	θ_{i8}	θ_{is}	$\alpha . \delta f_1 / \delta M_i$	$\beta . \delta f_2 / \delta M_i$
1	θ_k	$2\lambda_{12}$	λ_{12}	—	—	—	—	—	—	$R_1(1-2)$	α	—
2	θ_{2k}	λ_{12}	$2(\lambda_{12}+\lambda_{23})$	λ_{23}	—	—	—	—	—	$R_2(1-2)+R_2(2-3)$	$-\alpha$	—
3	θ_{3k}	—	λ_{23}	$2(\lambda_{23}+\lambda_{34})$	λ_{34}	—	—	—	—	$R_3(2-3)$	$\alpha . l_{12}/l_{34}$	$\beta . l_{78}/l_{34}$
4	θ_{4k}	—	—	λ_{34}	$2(\lambda_{34}+\lambda_{46})$	$-2\lambda_{46}$	λ_{46}	—	—	$-2Pa.\lambda_{46}$	$-\alpha . l_{12}/l_{34}$	$-\beta .(l_{78}/l_{34} + l_{78}/l_{46})$
5	θ_{5k}	—	—	—	$-2\lambda_{46}$	$2(\lambda_{46}+\lambda_{57})$	$-\lambda_{46}$	λ_{57}	—	$2Pa.\lambda_{46}+R_5(5-7)$	—	$\beta . l_{78}/l_{46}$
6	θ_{6k}	—	—	—	λ_{46}	$-\lambda_{46}$	$2\lambda_{46}$	—	—	$-Pa.\lambda_{46}$	—	$\beta . l_{78}/l_{46}$
7	θ_{7k}	—	—	—	—	λ_{57}	—	$2(\lambda_{57}+\lambda_{78})$	λ_{78}	$R_7(5-7)$	—	$-\beta$
8	θ_{8k}	—	—	—	—	—	—	λ_{78}	$2\lambda_{78}$	—	—	$+\beta$

a) *necunoscute*:

— bare încastrate ...... 6 a 6 necunoscute = 36

— rezemări .... 3 a 3 „ = 9

Total . . . 45 necunoscute

b) *relații statice*:

— bare .... 6 a 3 relații = 18

— noduri și rezemări .. 7 a 3 „ = 21

Total . . . 39 relații

Diferența 45—39 = 6 arată că sistemul e de șase ori static nedeterminat, deci va fi necesară introducerea a 6 articulații; distribuția acestora se va face plasând câte trei articulații pe fiecare din porțiunile 1-2-3-4 și 6-5-7-8, astfel ca și părțile componente ale construcțiunii să fie static determinate.

Vom introduce câte o articulație în secțiunile 1, 3, 4 (partea inferioară a barei 3-4), 6, 5 (extremitatea din stânga a barei 5-7) și 8. Rămân în ființă încastrările din nodurile 2 și 7; înlocuindu-le cu articulații, va fi necesară introducerea barelor suplimentare 1-3 și 5-8, fiecare din ele asigurând stabilitatea unei porțiuni de cadru.

Necunoscutele suplimentare M_2 și M_7, împreună cu cantitățile static nedeterminate inițiale, vor forma un total de 8 momente necunoscute, ce urmează a fi calculate. Intre ele vor exista două relații de legătură $f_1 = 0$ și $f_2 = 0$, provenind din condiția ca — sub acțiunea tuturor solicitărilor — eforturile din barele suplimentare să fie nule. Vor apare doi coeficienți nedeterminați α și β, astfel că grupul ecuațiilor de echilibru elastic va avea forma:

$$\text{art. 1.} \quad \theta_{11}M_1 + \theta_{12}M_2 + \ldots + \theta_{18}M_8 + \theta_{1s} + \alpha.\delta f_1/\delta M_1 + \beta.\delta f_2/\delta M_1 = 0$$

....

$$\text{art. 8.} \quad \theta_{81}M_1 + \theta_{82}M_2 + \ldots + \theta_{88}M_8 + \theta_{8s} + \alpha.\delta f_1/\delta M_8 + \beta.\delta f_2/\delta M_8 = 0$$

plus două relații de legătură, deci un total de 10 ecuații cu 10 necunoscute.

In fig. 19 sunt date curbele de momente și diagramele coeficienților de influență m_{xi}, necesare calculului; pentru fiecare caz s'au indicat valorile X_1 și X_2 ale solicitărilor axiale din barele suplimentare. Trasarea se face pe baza cazurilor arătate în fig. 12, 13 și 14, cât și a reacțiunilor ce desvoltă una din bare asupra celorlalte, atunci când i se aplică momente în secțiunile dela capete.

Vom observa că, ținând seama de convenția de semne admisă și arătată pe schema cadrului, un moment *pozitiv* aplicat în secțiunea 5 dă diagramă *negativă* pe bara 4-6, conturul 6-5-7-8 neavând continuitate în orientarea săgeților.

Relațiile de legătură, obținute prin sumarea valorilor X_1 și X_2, corespunzătoare tuturor diagramelor, au forma:

$$\begin{aligned} (16) \qquad & f_1 = (M_1 - M_2) + (M_3 - M_4)\, l_{12}/l_{34} + Pa = 0 \\ & f_2 = (M_3 - M_4)\, l_{78}/l_{34} + (M_5 + M_6 - M_4)\, l_{78}/l_{46} + \\ & \qquad + (M_8 - M_7) + Pa.l_{78}/l_{46} = 0 \end{aligned}$$

Se constată că aceste relații sunt identice cu acelea ce s'ar obține aplicând ecuația lucrului mecanic virtual, dând diferite deplasări **distincte** posibile. In cazul de față sunt numai două posibilități, câte una pentru fiecare din porțiunile 1-2-3-4 și 3-5-6-7-8, așa cum se arată în fig. 20, dând deplasările $\theta_1 = 1$ și $\theta_8 = 1$.

Rotirile ce rezultă în diferite articulaţii, se obţin din cele iniţiale prin aplicarea de rapoarte între lungimea barelor 1-2 resp. 7-8 şi lungimile barelor din vecinătatea articulaţiei considerate, acestea constituind factorii de propagare ai deplasărilor virtuale.

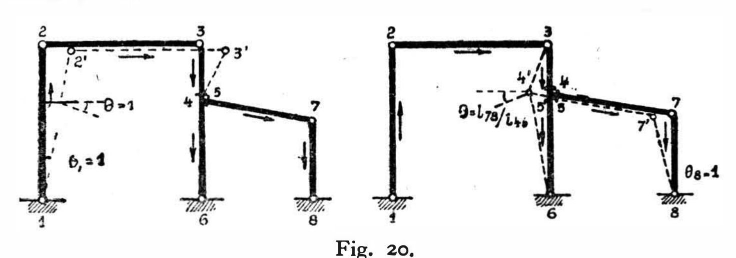


Fig. 20.

Termenii ecuaţiilor de echilibru elastic, rezultaţi din citire pe diagrame, ţinând seamă de expresiile rotirilor θ_{ii}, θ_{ik} şi θ_{is}, cât şi de rezultatele tip de integrare, sunt daţi în tablou; din totalul de 64 coeficienţi ai necunoscutelor $M_1 \dots M_8$, un număr de 40 sunt nuli, ecuaţiile căpătând prin aceasta o formă foarte simplă pentru rezolvare.

Drumul ce vom urma în calcul va fi analog exemplelor precedente.

Trecând la cazul numeric indicat în fig. 19, vom admite:

$$n_{12} = n_{46} = 2 \quad ; \quad n_{34} = n_{78} = 3 \quad ; \quad n_{23} = 1 \quad ; \quad n_{57} = 1{,}48$$

astfel că valorile $\lambda_{ik} = n_{ik}.l_{ik}$ vor fi:

$$\lambda_{12} = 2.8 = 16 \text{ m} \; ; \; \lambda_{23} = 1.8 = 8 \text{ m} \; ; \; \lambda_{34} = 3.3 = 9 \text{ m} \; ; \; \lambda_{46} = 2.5 = 10 \text{ m}.$$

$$l_{57} = \sqrt{6^2 + 1^2} = 6{,}08 \text{ m} \; ; \; \lambda_{57} = 1{,}48 . 6{,}08 \cong 9 \text{ m} \; ; \; \lambda_{78} = 3.4 = 12 \text{ m}.$$

Formăm termenii liberi, ţinând seamă de formulele dela pag. 260.

$$R_1\,(1-2) = 6n_{12}.S_{21}/l_{12} = -\,6.2.4.1\,(8^2 - 3.3^2)/6.8 \quad = -\,37 \text{ tm}^2$$
$$R_2\,(1-2) = 6n_{12}.S_{12}/l_{12} = +\,6.2.4.1\,(8^2 - 3.5^2)/6.8 \quad = -\,11 \text{ tm}^2$$
$$R_2\,(2-3) = R_3\,(2-3) = 6n_{23}.S_{23}/l_{23} = 6.1.2.8^3/24 \quad = 256 \text{ tm}^2$$
$$R_5\,(5-7) = R_7\,(5-7) = 6n_{57}.S_{57}/l_{57} = 6.1{,}48.5.6.6{,}08/9 = 180 \text{ tm}^2$$
$$Pa.\,\lambda_{46} = 4.1.10 = 40 \text{ tm}^2.$$

Coeficienţii lui α şi β, din ultimile două coloane ale tabloului, sunt:

$$l_{12}/l_{34} = 8/3 = 2{,}67 \; ; \; l_{78}/l_{34} = 4/3 = 1{,}34 \; ; \; l_{78}/l_{46} = 4/5 = 0{,}8$$

Ecuaţiile 1 şi 8 sunt, introducând valorile λ_{ik} şi luând $100\,\alpha$ resp. $100\,\beta$ în loc de α resp. β:

$$32\,M_1 + 16\,M_2 - 37 + 100\,\alpha = 0$$
$$12\,M_7 + 24\,M_8 \quad + 100\,\beta = 0$$

de unde:

$$M_1 = -\,0{,}5\,M_2 + 1{,}16 - 3{,}125\,\alpha$$
$$M_8 = -\,0{,}5\,M_7 - 4{,}167\,\beta.$$

Ecuaţiile 2 şi 3 devin, ţinând seamă de ecuaţia 1:

$$80\,M_2 + 16\,M_3 \quad + 527 + 100\,\alpha \quad = 0$$
$$8\,M_2 + 34\,M_3 + 9\,M_4 + 256 + 267\,\alpha + 134\,\beta = 0$$

din care obținem:

$$M_2 = +0{,}056\,M_4 - 5{,}35 + 0{,}336\,\alpha + 0{,}828\,\beta$$
$$M_3 = -0{,}278\,M_4 - 6{,}27 - 7{,}932\,\alpha - 4{,}136\,\beta$$

Ecuațiile 6 și 7 sunt, ținând seamă de ecuația 8:

$$10\,M_4 - 10\,M_5 + 20\,M_6 \qquad - 40 + 80\,\beta = 0$$
$$18\,M_5 \qquad + 72\,M_7 + 360 - 300\,\beta = 0$$

de unde:

$$M_6 = -0{,}5\;M_4 + 0{,}5\,M_5 + 2 - 4\,\beta$$
$$M_7 = -0{,}25\,M_5 - 5 + 4{,}167\,\beta$$

Expresiile momentelor M_1 și M_8 devin:

$$M_1 = -0{,}028\,M_4 + 3{,}84 - 3{,}291\,\alpha - 0{,}414\,\beta$$
$$M_8 = +0{,}125\,M_5 + 2{,}50 - 6{,}251\,\beta$$

Ecuațiile 4 și 5 sunt:

$$9\,M_3 + 38\,M_4 - 20\,M_5 + 10\,M_6 \qquad - 80 - 267\,\alpha - 214\,\beta = 0$$
$$-20\,M_4 + 38\,M_5 - 10\,M_6 + 9\,M_7 + 260 \qquad + 80\,\beta = 0$$

Introducând expresiile momentelor M_3, M_6 și M_7 obținem:

$$30{,}5\,M_4 - 15\quad M_5 - 116{,}43 - 338{,}39\,\alpha - 291{,}22\,\beta = 0$$
$$15\quad M_4 - 30{,}75\,M_5 - 195 \qquad - 157{,}50\,\beta = 0$$

de unde:

$$M_4 = +0{,}87 + 14{,}598\,\alpha + 9{,}313\,\beta$$
$$M_5 = -5{,}92 + 7{,}121\,\alpha - 0{,}579\,\beta$$

Ducând aceste valori în expresiile tuturor momentelor, vom avea:

$$M_1 = +3{,}82 - 3{,}700\,\alpha - 0{,}675\,\beta$$
$$M_2 = -5{,}30 + 1{,}153\,\alpha + 1{,}350\,\beta$$
$$M_3 = -6{,}51 - 11{,}990\,\alpha - 6{,}725\,\beta$$
$$M_4 = +0{,}87 + 14{,}598\,\alpha + 9{,}313\,\beta$$
$$M_5 = -5{,}92 + 7{,}121\,\alpha - 0{,}579\,\beta$$
$$M_6 = -1{,}40 - 3{,}739\,\alpha - 8{,}945\,\beta$$
$$M_7 = -3{,}52 - 1{,}780\,\alpha + 4{,}312\,\beta$$
$$M_8 = +1{,}76 + 0{,}890\,\alpha - 6{,}323\,\beta$$

Introducând expresiile momentelor în relațiile de legătură (16), obținem următorul sistem de ecuații:

$$100\,\alpha + 59{,}1\,\beta + 8{,}68 = 0$$
$$100\,\alpha + 112{,}6\,\beta + 18{,}98 = 0$$

care dă soluțiile:

$$\alpha = 0{,}028 \qquad \text{și} \qquad \beta = -0{,}192$$

Aceşti doi coeficienţi reprezintă rotirile *liniilor* nodurilor 1-2 şi 7-8 în poziţia deformată a cadrului. Valorile numerice ale acestor rotiri vor fi, observând că în ecuaţii am considerat 100 α resp. 100 β în loc de α resp. β:

$$2{,}8/6EI \quad \text{şi} \quad -19{,}2/6EI$$

Ţinând seamă de convenţia de semne de pe barele cadrului, cât şi de semnele rotirilor, rezultă că deplasarea orizontală a nodurilor va fi *spre dreapta*; cu ajutorul factorilor de propagare, ce figurează în relaţiile de legătură (16), se pot determina rotirile faţă de verticală a liniei nodurilor dela capetele fiecărei bare a cadrului.

Se mai observă că prima rotire e mult mai mică decât cea de a doua, ceia ce înseamnă că deplasările orizontale sunt mai accentuate la porţiunea (etajul) 6-5-7-8.

Aşa cum s'a arătat la exemplul precedent, vom calcula comparativ valorile momentelor, atât pentru cazul real al nodurilor deplasabile, cât şi pentru ipotezele aproximative:

— $\alpha = 0$ etajul 1-2-3 fix, etajul 6-5-7-8 deplasabil,

— $\alpha = \beta = 0$ cadru cu noduri fixe.

TABLOU

cuprinzând valorile momentelor în diferite ipoteze. Valori in tm.

M_i	A_i	$B_i . \alpha$	$C_i . \beta$	Noduri deplas.	$\alpha = 0$	Noduri fixe
M_1	+ 3,82	— 0,104	— 0,130	+ 3,59	+ 3,69	+ 3,82
M_2	— 5,30	+ 0,032	+ 0,259	— 5,01	— 5,04	— 5,30
M_3	— 6,51	— 0,336	— 1,291	— 8,14	— 7,80	— 6,51
M_4	+ 0,87	+ 0,406	+ 1,788	+ 3,06	+ 2,66	+ 0,87
M_5	— 5,92	+ 0,199	— 0,111	— 5,83	— 6,03	— 5,92
M_6	— 1,40	— 0,105	— 1,717	— 3,22	— 3,12	— 1,40
M_7	— 3,52	— 0,050	+ 0,828	— 2,74	— 2,69	— 3,52
M_8	+ 1,76	+ 0,025	— 1,214	+ 0,57	+ 0,55	+ 1,76

Examinarea tabloului arată că, între valorile găsite pentru cazul real al nodurilor deplasabile şi cele pentru ipoteza aproximativă a nodurilor fixe, sunt diferenţe sensibile în unele secţiuni (3, 4, 6 şi 8); ipoteza intermediară — etajul 1-2-3 fix şi etajul 6-5-7-8 deplasabil — dă valori foarte apropiate de cazul real.

Admiterea dela începutul calculului a acestei aproximaţii, ar fi adus simplificări sensibile în rezolvare, prin dispariţia din ecuaţii a tuturor termenilor conţinând pe α, cât şi a uneia din relaţiile de condiţie (prima).

Pe baza valorilor indicate în tablou, pentru cazul nodurilor deplasabile, s'a trasat diagrama definitivă de momente încovoetoare, arătată în fig. 19, unde s'a schiţat separat şi situaţia diferitelor momente ce apar în jurul nodului 4, 5.

VII. CONCLUZIUNI

Căutând caracteristicele ce rezultă din organizarea de calcul urmărită în paginele acestei lucrări, se pot constata următoarele:

1. Ideia centrală a constat în a da o semnificare unitară tuturor elementelor ce intervin în calcul, întroducând şi menţinând permanent în evidenţă *deplasările elastice.*

Pentru aceasta s'a luat de bază un sistem static determinat, obținut prin întroducerea unui număr convenabil de articulațiuni în cadrul inițial, urmărind apoi, în aceste puncte, rotirile ce intervin între cele două fețe ale secțiunii, sub acțiunea succesivă a încărcărilor exterioare și a cantităților static nedeterminate, devenite și ele tot solicitări exterioare. Condiția de continuitate a barelor și de indeformabilitate a unghiurilor cadrului, a condus la stabilirea sistemului de ecuații, prin egalarea cu zero a rotirilor rezultante.

Acest procedeu are avantajul că materializează oarecum calculul, fiind în special adresat cititorului debutant în materie de sisteme nedeterminate, pentru care de multe ori acest domeniu pare cam abstract la prima vedere.

2. Constatarea că toți coeficienții cantităților static nedeterminate, din sistemul de ecuații de echilibru elastic al cadrului, sunt rotiri de forma θ_{ik}, a condus la căutarea unei posibilități cât mai ușoare și mai rapide pentru evaluarea acestora.

3. Expresiunile simple ce aceste deplasări pot căpăta, prin aplicarea teoremei *Castigliano* și a principiului lucrului mecanic minimal, au impus așezarea pe primul plan a *coeficienților de influență*, a căror diagrame pot fi trasate cu ușurință, dat fiind că e vorba de un sistem static determinat, acționat în toate cazurile de către o singură solicitare.

4. Faptul că, la cadrele cu bare drepte, formele diagramelor coeficienților de influență de pe oricare bară se reduc la câteva cazuri tip, a permis să se obțină direct valorile θ_{ik}, dat fiind că acestea nu sunt altceva decât integralele în lungul barelor a produselor coeficienților de influență, luați doi câte doi.

Se ajunge astfel la exprimarea tuturor rotirilor θ_{ik} în funcție de elementele caracteristice ale barelor: $\lambda_{ik} = l_{ik} . I/I_{ik}$.

Procedeul este foarte avantajos, prin simpla privire a diagramelor coeficienților de influență putând să se scrie *direct* toți coeficienții cantităților static nedeterminate din sistemul de ecuații.

5. Termenii liberi ai ecuațiilor fiind de forma θ_{is}, deci având o perfectă analogie cu celelalte rotiri, se pot scrie tot atât de repede, privind diagramele coeficienților de influență și cele ale suprafețelor de momente, date de încărcările exterioare în barele sistemului static determinat.

Rezultă de aci un alt avantaj. Pentru o aceiași ipoteză de încărcare, putem considera sarcinile exterioare fie succesiv, fie concomitent — după voință — fără a aduce prin aceasta vreo complicare sistemului de ecuații, dat fiind că în al doilea caz termenii liberi vor fi sumele algebrice ale rotirilor parțiale, deci rotirile θ_{is} ce se produc sub acțiunea concomitentă a încărcărilor, citirea lor pe diagrame fiind imediată.

6. Structura sistemului de ecuații arată că toți coeficienții necunoscuttelor depind numai de forma, dimensiunile și rezemările cadrului, câși de modul cum a fost făcut static determinat. Odată constituită, această parte a ecuațiilor rămâne aceiași pentru orice fel de încărcări, modificându-se numai termenii liberi.

7. Pe baza sistemuui de ecuații, format pentru un cadru și niște încărcări date, se pot studia și toate cadrele provenite din acesta, prin modificarea naturii rezemărilor (articulații în loc de încastrări). Pentru fiecare articulație *i* ce ar înlocui o încastrare, se anulează rândul și coloana *i* din tabloul coeficienților necunoscutelor, obținându-se deci imediat sistemul de ecuații corespunzător. Aceasta permite să se studieze comparativ influența naturei uneia sau a mai multora din rezemări, asupra diagramei finale de momente încovoetoare din cadrul considerat.

8. Trecând la rezolvarea sistemului de ecuații obținut, s'a văzut că în toate cazurile este posibil să ne aranjăm astfel, încât să apară numeroase *goluri* în tabloul coeficienților necunoscutelor, ceia ce elimină *totdeauna* nevoia de a rezolva un sistem de ecuații egal cu gradul de nedeterminare. Combinând și grupând ecuațiile, putem reduce chestiunea la rezolvarea de sisteme reduse.

Se remarcă totodată că natura rezemărilor cadrului (încastrări sau articulații) nu influențează asupra numărului de ecuații din sistemul final ce trebue rezolvat; articulațiile întroduse în rezemări dau în general ecuații ce conțin numai două necunoscute, ce permit eliminarea din restul sistemului a momentelor M_i, corespunzătoare acestor rezemări, aducând prin aceasta corecțiunile impuse de prezența încastrărilor în reazeme.

9. In cazul cadrelor cu noduri deplasabile, avem două posibilități: procedând după linia generală de calcul, văzută la sistemele cu noduri fixe, sau întroducând necunoscute suplimentare, prin suprimarea încastrărilor ce asigură nedeformabilitatea statică a sistemului de bază, apărând cu această ocazie relațiile de legătură între necunoscute.

In primul caz, sistemul inițial de ecuații e mai complicat, trebuind efectuată în prealabil operația combinării ecuațiilor, pe baza indicațiilor ce ne dau diagramele coeficienților de influență, spre a se ajunge la sistemul simplificat, ce permite o ușoară rezolvare.

In al doilea caz, sistemul de ecuații are dela început o structură foarte simplă, cu mai multe goluri, dar sunt necesare în plus, pentru fiecare încastrare suprimată, o necunoscută suplimentară și un coeficient nedeterminat, împreună cu ecuațiile corespunzătoare.

Primul procedeu e indicat pentru cadre cu grad de nedeterminare mai redus, sau cu mai multe etaje; al doilea pentru cadre multiplu static nedeterminate, dat fiind că creșterea numărului ecuațiilor suplimentare este foarte redusă, *ea neavând legătură cu gradul de nedeterminare*, ci numai cu numărul etajelor.

Vom înțelege în general prin *etaje*, diferite porțiuni de cadru ce pot fi antrenate prin câte o deplasare virtuală. Deci numărul etajelor va fi dat de numărul deplasărilor virtuale *diferite* posibile. El este în acelaș timp egal cu numărul încastrărilor ce trebuesc menținute — în rezemări sau în interiorul construcțiunii — pentru a asigura nedeformabilitatea statică a sistemului static determinat de bază. Aceste două aspecte sunt de fapt unul și acelaș lucru, deoarece — pentru fiecare asemenea încastrare menținută — este posibilă o deplasare virtuală a unei porțiuni din cadru.

10. Coeficienții nedeterminați ce intervin, au o semnificare ce-i încadrează în ideia generală a organizării de calcul prezentate, ei fiind tot deplasări elastice, reprezentând rotirea *liniei nodurilor* dela capetele barei ce antrenează fiecare din deplasările virtuale, ce se pot da diferitelor porțiuni de cadru, aceste deplasări fiind chiar rotirile reale ce se produc în starea deformată a construcțiunii. Se pot calcula astfel toate deplasările orizontale ale nodurilor cadrului, sub acțiunea încărcărilor exterioare, în ipoteza de dimensionare admisă inițial.

11. Grupând, în cuprinsul termenului liber al fiecărei ecuații, atât termenii proveniți dela încărcările exterioare (θ_{is}), cât și cei ce conțin coeficienții nedeterminați, vom obține — prin rezolvarea sistemului — expresiile momentelor necunoscute sub forma: $M_i = A_i + B_i . \alpha + C_i . \beta + \ldots$ unde A_i este valoarea momentului pentru ipoteza nodurilor fixe, iar $B_i . \alpha$, $C_i . \beta, \ldots$ reprezintă corecțiunile ce provin dela considerarea deplasării orizontale a nodurilor la diferitele etaje.

Calculând coeficienții nedeterminați α, $\beta, \ldots$ cu ajutorul relațiilor de legătură, putem obține în paralel valorile numerice ale tuturor momentelor, atât pentru cazul real al nodurilor deplasabile, cât și pentru diferite ipoteze aproximative, considerând fixitatea tuturor sau numai a unora din etaje, putând face astfel comparații utile asupra întinderii acestor aproximații.

Admiterea dela început a unei ipoteze aproximative, conduce la anularea în ecuații a termenilor corespunzători unora sau tuturor coeficienților nedeterminați, dispărând totodată și relațiile de legătură respective; prin aceasta rezolvarea sistemului de ecuații este considerabil simplificată.

12. Comparată cu metoda *Prof. Gh. Em. Filipescu*, cu care capătă o oarecare apropiere ca aspect prin întroducerea coeficienților nedeterminați, organizarea de calcul ce propunem se caracterizează prin un număr *foarte redus* de necunoscute și ecuații suplimentare, acest număr ***nedepinzând de gradul de nedeterminare***, ci numai de numărul etajelor construcțiunii; cu cât gradul de nedeterminare al etajelor crește, cu atât importanța numărului ecuațiilor suplimentare, în raport cu numărul normal de ecuații de echilibru elastic, se atenuează.

In metoda *Filipescu*, apar în plus câte două ecuații suplimentare pentru fiecare nod unde se întâlnesc mai mult de două bare, această creștere a numărului ecuațiilor fiind deci ***în directă legătură cu gradul de nedeterminare*** al construcțiunii.

Față de caracteristicele arătate, credem că organizarea de calcul, ce am folosit în paginile acestei lucrări, corespunde scopului ce ne-am propus, de a da calculului cadrelor cu bare drepte un aspect sugestiv și o linie de rezolvare rapidă și simplu de urmărit, permițând în special cititorului începător în studiul sistemelor static nedeterminate, să se familiarizeze cu acest domeniu și să aibă la dispoziție o normă de calcul ușor de stăpânit, în cazul când o va găsi preferabilă față de diferitele metode cunoscute.

RÉSUMÉ

Le présent travail se propose d'exposer une méthode simple et suggestive pour le calcul des cadres, tout particulièrement des cadres à barres droites, qui évite le coté trop abstrait de l'étude habituelle des systèmes hyperstatiques, afin que cette méthode soit facile à saisir et aisément abordable pour tous les interessés.

En essence on s'est préoccupé dans ce but de trouver:

a) Une représentation très claire pour les éléments qui interviennent dans la résolution des cadres, en leur donnant des interprétations suggestives, afin que le lecteur puisse aisément suivre la marche des calculs.

b) Une disposition très simple des calculs proprement dits, laquelle — dans le cas particulier des cadres à barres droites — suprime les intégrations de la méthode classique, car elle déduit les équations d'équilibre élastique de l'inspection de diagrammes parlant clairement aux yeux.

On a réussi ainsi à établir une solution rapide du problème des cadres, bornée à l'utilisation de quelques diagrammes, sur lesquels on peut lire tout simplement les équations élastiques de la construction considérée. Du même coup on obtient un système d'équations d'une structure favorable, conduisant toujours à un système final très réduit, par voie d'élimination de la pluspart des inconnues

L'idée dominante de cette étude a été de donner une interprétation uniforme à tous les éléments qui interviennent dans le calcul, en introduisant et maintenant constamment en évidence les déplacements élastiques, sous leur forme la plus simple, celle des rotations relatives entre les deux faces d'une même section des barres, sous l'effet des sollicitations extérieures, lorsqu'on suppose en ce point une articulation.

Dans tous les cas, le point de départ est un système statiquement détérminé, déduit du système donné par l'introduction d'un nombre convenable d'articulations et l'étude porte sur les rotations mentionnées quand on considére les effets successifs des charges extérieures ainsi que des inconnues hyperstatiques qui, elles aussi, dans les hypothèses faites, jouent le rôle de solicitations extérieures. Ce procédé a l'avantage de matérialiser en quelque sorte le calcul, qu'on peut donc suivre sans effort. D'autre part, on a montré que ces rotations sont précisément les coefficients des inconnues du système d'équations élastiques.

A l'aide du théorème de Castigliano et du principe du travail minimum on a pu exprimer ces rotations en fonction des *coefficients d'influence*, qui représentent les moments fléchissants dans les différentes sections du système statique, dus à l'application successive d'un moment égal à l'unité sur les deux faces de chacune des sections où on a introduit des articulations dans le système initial.

Les diagrammes des coefficients d'influence peuvent se tracer rapidement, car il s'agit chaque fois d'une sollicitation unique appliquée au système statiquement détérminé. C'est l'emploi de ces diagrammes qui donne son cachet spécifique à la méthode proposée.

Par le moyen des expression trouvées pour les rotations élémentaires et des diagrammes des coefficients d'influence, on a réussi à éliminer toutes les intégrations, en établissant des formules très peu nombreuses et d'une grande simplicité, qui permettent la *lecture directe* des rotations sur les diagrammes.

Les termes libres des équations sont en parfaite similitude avec les coefficients des inconnues, car ils représentent des rotations analogues, qui peuvent se détérminer par les mêmes moyens, c'est-à-dire par les diagrammes des coefficients d'influence et les courbes des moments fléchissants du système statique sous l'action des charges extérieures.

D'une façon générale il n'y a dans la méthode exposée aucune difference entre les cadres à noeuds fixes et ceux dont les noeuds peuvent subir des déplacements de translation, les deux catégories pouvant être traitées de la même manière, car les déplacements horizontaux des noeuds n'apparaissent pas directement dans les calculs; toutefois ces déplacements — quand ils peuvent exister — influent sur les diagrammes utilisés en les compliquant, ce qui conduit à des systèmes d'équations eux aussi plus compliqués, d'où la nécessité d'une opération supplémentaire — tou-

jours évidenciée sur les diagrammes — pour l'établissement d'équations finales de facile résolution.

On a donné une attention toute particulière à ce cas, et on a réussi à trouver — pour les cadres à noeuds déplaçables — une façon d'opérer aboutissant directement à des système d'équations d'une structure tout aussi simple que pour les cadres à noeuds fixes. Le procédé employé nécéssite l'introduction d'un nombre très restreint d'inconnues supplémentaires, avec un nombre correspondant de relations de liaison, qui influent les équations élastiques par l'intermédiaire de coefficients indétérminés, dont la signification s'encadre dans le principe général de la méthode proposée, car ce sont encore des déplacements élastiques, mais cette fois mettant en évidence les déplacements horizontaux des noeuds.

On doit souligner que le nombre d'inconnues supplémentaires introduit de cette manière, *n'est pas en fonction du degré d'indétermination statique du cadre*, mais du nombre d'étages de la construction, *étages* signifiant les différentes parties du cadre qui peuvent être entrainées par des déplacements virtuels distincts possibles. L'augmentation du nombre des équations est ainsi très réduite; les systèmes d'équations que l'on obtient se prêtent à une résolution expéditive. Les exemples numériques, traités pour faire ressortir les caractéristiques de la méthode, montrent que pour des cadres six ou sept fois indétérminés il a été nécessaire de résoudre des systèmes contenant au plus trois équations à trois inconnues, ce qui représente un avantage appréciable.

A l'usage la méthode montre encore d'autres avantages caractéristiques, dont deux des plus intéressants sont les suivants:

— Le système d'équations établi pour un cadre et un ensemble de charges extérieures données, permet d'étudier parallèlement tous les cadres qui en dérivent par modification de la nature des appuis (encastrements remplacés par des articulations); il suffit d'annuler certains termes dont le choix est immédiat à l'aide des diagrammes établis. On a ainsi la possibilité de faire un examen comparatif de l'effet sur le diagramme des moments fléchissants de la nature d'un ou de plusieurs appuis.

— En second lieu: pour les cadres à noeuds déplaçables il suffit de conduire les calculs d'une certaine manière, de façon a maintenir en évidence les déplacements horizontaux des noeuds, pour obtenir en plus de la solution exacte et sans nouveaux calculs, les moments fléchissants du cadre pour une série d'hypothèses d'approximation, comportant la fixité d'un ou de plusieurs étages et par conséquence une comparaison entre les diverses hypothèses d'approximation faites et la solution exacte du problème.

On peut à volonté recourir dès le début à des approximations de cette nature, en annulant tout simplement certains termes des équations et simplifier encore davantage la résolution.
